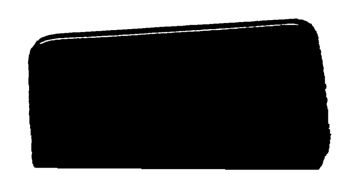
G. Hay







# THEORIE UND ANWENDUNG

DER

# DETERMINANTEN

VON

DR. RICHARD BALTZER

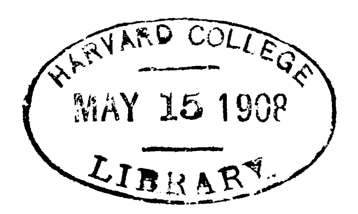
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN, MITGLIED DER K. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG

VIERTE VERBESSERTE AUFLAGE

LEIPZIG

VERLAG VON S. HIRZEL

1875.


HARVARD COLLEGE
MAY 15 1908
LIBRARY

# Vorrede

## zur ersten Auflage.

Das mächtige Instrument der Algebra und Analysis, welches unter dem Namen der Determinanten in Gebrauch gekommen ist, war aus den bis vor wenig Jahren vorhandenen Quellen nicht leicht kennen zu lernen. Die grossen Meister hatten jenes Hülfsmittel für die höheren Zwecke, denen ihr Genius diente, sich geschaffen und waren wenig gesonnen, ihren Bau durch Betrachtungen über Material und Werkzeug, von deren Tüchtigkeit sie tiefe Ueberzeugung hatten, aufzuhalten. Daher ist es mit den Determinanten wie wohl mit allen wichtigen Instrumenten der Mathematik ergangen, dass sie längere Zeit im Besitz von wenig Auserwählten blieben, bevor eine geordnete Theorie derselben den Nichtkennern das Verständniss und den Gebrauch zugänglicher machte. Die erste Idee, der Algebra durch Bildung combinatorischer Aggregate, die heute Determinanten genannt werden, zu Hülfe zu kommen, rührt, wie Dirichlet bemerkt hat, von Leibniz her. Ausser dem Briefe an L'Hospital 1693 April 28 und dem Aufsatz Acta Erud. 1700 p. 200, in welchem Leibniz die Ueberzeugung von der Fruchtbarkeit seines Gedankens ausspricht, scheint aber nichts übrig zu sein, woraus sich schliessen liesse, dass Leibniz sich um weitere Früchte dieser Idee bemüht habe. Die zweite Erfindung der Determinanten durch Cramer 1750 blieb unverloren wegen der Dienste, die der Algebra daraus erwuchsen, theils durch Cramer selbst, theils nach einer Reihe von Jahren durch Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange. Namentlich war es Vandermonde (sur l'élimination 1771), der einen Algorithmus der Determinanten zu begründen suchte, während Lagrange in der Abhandlung sur les pyramides 1773 von den Determinanten dritten Grades bei Problemen der analytischen Geometrie bereits in grosser Ausdehnung Gebrauch machte. Den wichtigsten Anstoss jedoch zur weiteren Ausbildung der Rechnung mit Determinanten haben Gauss' Disquisitiones arithmeticae 1801 gegeben. Ausgehend von der Betrachtung der Algorithmen, welche in diesem Werke sich auf die »Determinanten der quadratischen

Formen« beziehen, stellten CAUCHY und BINET 1812 die allgemeinen Regeln für die Multiplication der Determinanten auf, wodurch Rechnungen mit schwer zu bewältigenden Aggregaten eine unerwartete Leichtigkeit gewannen. Des neuen Calcüls, welchen besonders CAUCHY ausgebildet hatte, bemächtigte sich vorzüglich JACOBI 1826, dessen in Crelle's Journal niedergelegte Arbeiten reichlich Zeugniss geben, was das neue Instrument in des Meisters Hand zu leisten vermochte. Erst durch JACOBI's Abhandlungen »de formatione et proprietatibus determinantium« und »de determinantibus functionalibus 1841« wurden die Determinanten Gemeingut der Mathematiker, welches seitdem von verschiedenen Seiten her wesentliche Vermehrungen erhalten hat.

JACOBI's Abhandlung de formatione etc., welche nicht unmittelbar für das erste Studium des Gegenstandes verfasst ist, und SPOTTISWOODE elementary theorems relating to determinants, London 1851, eine Schrift, welche bei zweckmässiger Anordnung des Stoffes und einer guten Auswahl von Beispielen manche Ungenauigkeiten enthält, waren die einzigen vorhandenen Anleitungen zur Kenntniss der Determinanten, als ich mich entschloss, das zum grossen Theil noch zerstreute Material in eine Theorie der Determinanten, begleitet von den wichtigsten Anwendungen derselben, zusammenzustellen. Meine Arbeit war fast zum Abschluss gebracht, als mir BRIOSCHI la teorica dei determinanti, Pavia 1854, bekannt wurde. Dieses Werk, hervorgerufen durch das auf vielen Seiten gefühlte Bedürfniss einer elementaren Anleitung zur Kenntniss der Determinanten, ist mit vorzüglicher Sachkenntniss geschrieben und enthält einen reichen Schatz trefflichen Materials, wodurch es schnell in weiten Kreisen Eingang und Anerkennung sich verschafft hat. Die jüngst in Berlin erschienene deutsche Uebersetzung dieses werthvollen Buches ist ohne Zweifel den deutschen Mathematikern sehr willkommen. Dass ich den Muth hatte, meine Schrift über denselben Gegenstand zu vollenden, gründet sich hauptsächlich auf die Verschiedenheit in der Anlage und Ausführung meiner Arbeit. Um den theoretischen Kern des Gegenstandes möglichst rein herauszuschälen, habe ich die Haupteigenschaften der Determinanten und die darauf gegründeten Algorithmen in synthetisch genau articulirtem Vortrag, wie er den Lehrbüchern von Alters her eignet, abgehandelt und wo es nöthig schien durch einfache Beispiele erläutert. Es kann zur klaren Einsicht in die Lehrsätze eines Systems nur erwünscht sein, bei jedem Lehrsatze die Summe der Prämissen, auf denen er beruht, straff zusammengezogen zu sehen. Dagegen habe ich die Anwendungen auf Algebra, Analysis und Geometrie in einen besondern Abschnitt vereinigt, um durch grösseren Zusammenhang leichtere Auffassung und in den einzelnen Materien eine gewisse Vollständigkeit erreichen zu können. Besonders aber wünschte ich meiner

Arbeit dadurch einigen Werth zu verleihen, dass ich soviel als möglich bis zu den Originalquellen vorzudringen suchte, um die ersten Erfinder von Methoden und die ersten Entdecker von Lehrsätzen citiren zu können. Solche Citate sind nicht nur ein Opfer, welches die spätere Zeit den frühern Offenbarungen des Genius schuldet, sie bilden ein Stück Geschichte der Wissenschaft und laden zum Studium der hohen Werke ein, aus denen die Wissenschaft aufgebaut ist, und in denen noch immer reiche Schätze ungehoben ruhen. Freilich kann ich nicht erwarten, dass mein Suchen hierbei überall zum Finden des Richtigen geführt hat; ich hoffe aber, dass verlautete Irrthümer zu gelegentlicher Aussprache des Richtigen Veranlassung geben werden.

Nach dem Vorbemerkten ist es unnöthig hervorzuheben, was von meiner Seite eigenes dem vorgefundenen Material hinzugefügt worden ist. Es bleibt mir nur übrig, die Güte meines gelehrten Freundes Borchardt dankbar zu rühmen, der durch mancherlei Anweisung mich bei meiner Arbeit wirksam unterstützt hat.

1857.

---

## Zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage meines Buches hat in mehrern Abschnitten wesentliche Verbesserungen und Zusätze erhalten, welche die Auffassung zu erleichtern und den Blick zu erweitern geeignet schienen. Mehrere derselben sind bereits in meine Elemente der Mathematik 1872 übergegangen, namentlich die Vertauschung getrennter Elemente mittelst Vertauschungen von Nachbarn, die Definition eines Determinantengliedes, die Voranstellung der Systeme von Subdeterminanten, die Adjuncte eines Elements und einer Subdeterminante, die Composition einer Reihe aus zwei gegebenen Reihen (§§. 1—3). Neu geordnet und mit Erläuterungen ausgestattet ist §. 4, vermehrt um die Determinanten, welche zur Definition der Collinearität und der Involution dienen. In den eingeschalteten §. 5 wurden mehrere besondere Entwickelungen vereinigt, die Anordnung der Determinantenglieder nach den Elementen der Diagonale und nach den Elementen einer Zeile und einer Colonne, die Darstellung einer Determinante, von welcher eine Subdeterminante des nächstniederen Grades null ist, und der

Determinante eines Systems, dessen Elemente $a_{ik}$ und $a_{ki}$ entgegengesetzt gleich sind. In §. 6 ist die Determinante eines Systems von componirten Elementen, in §. 7 die Determinante eines Systems von Subdeterminanten übersichtlicher entwickelt und durch characteristische Beispiele erläutert worden.

Vereinfacht und ergänzt findet man in §. 8 die Auflösung eines linearen Systems, in §. 11 die Formulirung des gemeinschaftlichen Divisor verschiedener Grade von zwei ganzen Functionen, sowie der Multiplicatoren, mit Hülfe deren durch zwei gegebene ganze Functionen eine dritte gegebene ganze Function ausgedrückt wird. In §§. 12—14 haben mehrere Artikel grössere Zusätze und durch Umstellungen mehr Abrundung erhalten; den Schluss dieses Abschnitts bildet eine neue Mittheilung, die ich Herrn Rosanes verdanke, über die linearen Substitutionen, durch welche eine gegebene quadratische Form in dieselbe Form der neuen Variablen transformirt wird.

Die analytischen Ausdrücke für die Fläche eines Dreiecks sowie für das Volum eines Prisma und eines Tetraeders sind in §. 15 einfacher als bisher begründet worden, den Entwickelungen des §. 16 habe ich mehr Zusammenhang zu geben gesucht. In §. 17 sind hinzugekommen die Relation der Distanzen einer Geraden von 3 Puncten, einer Ebene von 4 Puncten, sowie auf Grund einer Mittheilung, mit der Herr Mertens mich beehrt hat, die Bestimmung des Kreises, der 3 gegebene Kreise einer Ebene berührt.

---

# Inhalt.

## Theorie der Determinanten.



## Anwendungen.

## Erster Abschnitt.

# Theorie der Determinanten.

---

### §. 1. Eintheilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen.

1. Die Elemente einer Complexion, aus welcher Permutationen abgeleitet werden sollen, werden durch Ordnungszahlen unterschieden. Ein Element heisst höher als ein anderes, wenn es die grössere Ordnungszahl hat. Bei einer abgeleiteten Complexion vergleicht man jedes Element mit allen folgenden und zählt, wievielmal einem höhern Elemente ein niederes nachsteht; die gefundene Anzahl heisst die Anzahl der Inversionen (dérangements, variations), welche die Complexion enthält*), z. B. die Permutation $a_2a_4a_3a_1$ enthält 4 Inversionen: $a_2a_1$, $a_4a_3$, $a_4a_1$, $a_3a_1$.

Die Permutationen gegebener Elemente sind von Cramer in zwei Classen getheilt worden, deren erste die Permutationen umfasst, in welchen eine gerade Anzahl von Inversionen vorhanden ist, deren zweite die Permutationen mit ungerader Anzahl von Inversionen enthält.

2. **Lehrsatz.** Wenn in einer Permutation ein Element mit einem andern vertauscht wird, während die übrigen Elemente ihre Plätze behalten, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl**).

**Beweis.** Wenn ein Element mit einem Nachbar vertauscht

---

*) Cramer Analyse des lignes courbes, 1750. Appendix p. 658.

**) Dieser Satz wurde zur Unterscheidung der Permutationen von Bézout aufgestellt (Hist. de l'acad. de Paris 1764 p. 292) und von Laplace bewiesen in derselben Sammlung 1772, II p. 294, einfacher von Mollweide demonstratio eliminationis Cramerianae, Leipzig 1811 § 9 und von Gergonne Ann. de Math. 4 p. 150.

wird, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um 1. Um das Element $g$ mit dem durch $k$ rechts folgende Elemente getrennten Element $h$ zu vertauschen, kann man zuerst $g$ mit dem rechten Nachbar $(k+1)$mal, dann $h$ mit dem linken Nachbar $k$mal vertauschen. Dabei ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen $(2k+1)$mal um 1, und wird ungeradmal aus einer geraden Zahl eine ungerade, aus einer ungeraden eine gerade Zahl. Also ändert sich bei der Vertauschung von $g$ und $h$ die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

3. Durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen können nach und nach alle Permutationen einer gegebenen Complexion dargestellt werden*). Die in dieser Reihe der Permutationen anzutreffenden Inversionen sind abwechselnd von gerader und von ungerader Anzahl (2). Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel (gerade) Permutationen der einen Classe, in denen eine gerade Anzahl Inversionen vorhanden ist, als (ungerade) Permutationen der andern Classe, welche eine ungerade Anzahl Inversionen enthalten. Die einen lassen sich durch eine gerade, die andern durch eine ungerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen aus der gegebenen Complexion ableiten.

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe, wenn eine aus der andern oder beide aus einer dritten durch eine gerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen sich ableiten lassen.

4. **Analytischer Beweis des Lehrsatzes** (2) **). Zur Unterscheidung der Permutationen bilde man bei jeder derselben die Differenzen der den Elementen zugehörigen Ordnungszahlen, indem man die Ordnungszahl jedes Elements von der jedes folgenden Elements subtrahirt. Eine Permutation enthält soviel Inversionen, als unter den erwähnten Differenzen negative vorkommen (1).

Das Product dieser Differenzen ist eine alternirende Function der Ordnungszahlen***), welche

*) Vergl. Gallenkamp Elem. d. Math. 1850 §. 110 und des Verf. Elem. d. Math. 2tes Buch §. 24.

**) Jacobi Determ. 2 (Crelle J. 22 no. 11).

***) Fonction alternée nach Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 30, Analyse algébr. III, 2. — Functio alternans nach Jacobi Crelle J. 22 p. 360.

durch Vertauschung von 2 Ordnungszahlen den entgegengesetzten Werth erhält.

**Beweis.** Nach der Vertauschung von zwei Ordnungszahlen haben die einzelnen Differenzen in veränderter Ordnung dieselben absoluten Werthe wie vorher, also behält ihr Product seinen absoluten Werth. Versteht man unter $i$ und $k$ zwei bestimmte, unter $r$ und $s$ zwei beliebige andere Ordnungszahlen; unter

$$\Pi(r-i)(r-k)\,,\quad \Pi(r-s)$$

die Producte aller Factoren, deren allgemeine Formeln

$$(r-i)(r-k)\,,\quad r-s$$

sind, bezeichnet man endlich eine der Einheiten 1 oder $-1$ durch $\varepsilon$, so wird das Product der bei einer gegebenen Permutation zu bildenden Differenzen durch

$$\varepsilon(k-i)\,\Pi(r-i)(r-k)\,\Pi(r-s)$$

ausgedrückt. Wird nun $i$ mit $k$ vertauscht, so bleiben

$$\Pi(r-i)(r-k) \text{ und } \Pi(r-s)$$

unverändert, und $k-i$ erhält den entgegengesetzten Werth. Also bekommt das Product den entgegengesetzten Werth, w. z. b. w.

Da durch Vertauschung von 2 Elementen der Permutation das in Betracht gezogene Product einen Zeichenwechsel erleidet, so ändert sich zugleich die Anzahl der negativen Differenzen, mithin die Anzahl der vorhandenen Inversionen, um eine ungerade Zahl, wie oben bewiesen worden.

5. Die Vertauschung der Elemente einer Complexion heisst cyclisch, wenn jedes Element durch das folgende, das letzte Element durch das erste ersetzt wird.

Durch eine cyclische Vertauschung aller Elemente erhält man aus einer gegebenen Permutation eine Permutation derselben oder nicht derselben Classe, je nachdem die Anzahl der Elemente ungerade oder gerade ist. Denn die cyclische Vertauschung von $n$ Elementen lässt sich durch Vertauschung des ersten Elements mit dem zweiten, dritten u. s. f., also durch $n-1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erreichen.

Aus einer gegebenen Permutation kann jede andere durch cyclische Vertauschung einzelner Gruppen von Elementen abgeleitet werden. Sind z. B.

7 2 5 4 3 8 1 6 9

die Ordnungszahlen der Elemente in der gegebenen Permutation, und

$$2\ 9\ 3\ 8\ 7\ 4\ 1\ 5\ 6$$

die Ordnungszahlen der Elemente in der abzuleitenden Permutation, so beginne man mit dem ersten umzustellenden Element der gegebenen Permutation, und ersetze der Reihe nach 7 durch 2, 2 durch 9, 9 durch 6, 6 durch 5, 5 durch 3, endlich 3 durch das Anfangs ausgestossene Element 7. Dadurch ist eine Gruppe von Elementen abgeschlossen und deren Placirung vollendet (293.7..56). Hierauf ersetze man aus der Reihe der noch übrigen Elemente 4 durch 8, 8 durch 4, womit die cyclische Vertauschung einer zweiten Gruppe von Elementen sich schliesst. Das noch übrige Element 1 ist durch ein anderes nicht zu ersetzen. Demnach ist durch 2 partiale cyclische Vertauschungen aus der ersten Permutation die zweite abgeleitet.

Wenn man jedes der Elemente, welches bei der eben beschriebenen Ableitung einer Permutation aus einer andern durch sich selbst zu ersetzen ist, als eine besondere Gruppe mitzählt, so gilt die Regel:

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe oder nicht, je nachdem die Differenz der Anzahl ihrer Elemente und der Anzahl der Gruppen, durch deren cyclische Vertauschung aus der einen Permutation die andre abgeleitet werden kann, gerade ist oder ungerade*). Bestehen nämlich die gegebenen Permutationen aus $n$ Elementen, lässt sich aus der ersten die zweite dadurch ableiten, dass man die Elemente in $p$ Gruppen von $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, . . Elementen vertheilt, und die einzelnen Gruppen durch cyclische Vertauschungen umbildet, so können die vorzunehmenden cyclischen Vertauschungen durch

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_3 - 1) + \cdots$$

Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen bewirkt werden. Nun ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots = n$$

also kann die zweite Permutation aus der ersten durch $n - p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden.

*) Cauchy 1815 J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 42. Anal. algébr. Note 4. Vergl. Jacobi Det. 3.

Um die Elemente der ersten Gruppe an ihre neuen Plätze zu bringen, sind nicht weniger als $\alpha_1 - 1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erforderlich u. s. f., daher kann eine der gegebenen Permutationen aus der andern nicht durch weniger als $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden. In dem obigen Beispiel ist $p=3$, $n-p=6$, folglich gehören die gegebenen Permutationen derselben Classe an.

## §. 2. Determinante eines Systems von $n^2$ Elementen.

1. Wenn $m$ Zeilen (Horizontalreihen, lignes) von je $n$ Elementen, oder von der andern Seite betrachtet $n$ Colonnen (Verticalreihen) von je $m$ Elementen zu unterscheiden sind, so werden die Elemente im Allgemeinen zweckmässig durch 2 Nummern (indices, suffixe) bezeichnet, deren erste die Zeile, deren zweite die Colonne des Elements angiebt*), z. B.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot\cdot & a_{mn} \end{matrix}$$

Das Element $a_{ik}$, dessen Zeilen-Nummer $i$ und dessen Colonnen-Nummer $k$ ist, wird auch durch $a_i^{(k)}$ oder $(ik)$ bezeichnet. Das System heisst defectiv, wenn $m < n$, excessiv, wenn $m > n$. Wenn $m = n$, so heisst die Reihe der Elemente vom ersten zum letzten

$$a_{11} \quad a_{22} \quad \cdot\cdot \quad a_{nn}$$

die Diagonalreihe des Quadrats der Elemente.

2. **Definition.** Unter der Determinante des Systems von $n^2$ Elementen, welche in bestimmter Ordnung in $n$ Reihen von je $n$ Elementen gegeben sind, versteht man ein bestimmtes Aggregat aller Producte von je $n$ solchen Elementen, deren nicht zwei einer Zeile oder einer Colonne angehören. Wenn $fgh$ .. eine Permutation bestimmter Classe der gegebenen Zeilen-Nummern, $rst$ .. eine Permutation derselben Classe oder nicht dersel-

---

*) Diese topographische Bezeichnung ist zuerst von Leibniz angewandt worden. S. dessen Brief an L'Hôpital 1693 April 28 und Acta Erud. 1700 p. 200 (Leibniz math. Schriften herausgeg. von Gerhardt II p. 239, V p. 348).

ben Classe der gegebenen Colonnen-Nummern (§. 1, 3), und demgemäss $\varepsilon$ die positive oder die negative Einheit bedeutet, so ist das Product

$$\varepsilon a_{fr} \; a_{gs} \; a_{ht} \; . \; .$$

ein Glied der Determinante. Daher sind auch

$$- \varepsilon a_{fs} \; a_{gr} \; a_{ht} \; . \; ., \quad - \varepsilon a_{gr} \; a_{fs} \; a_{ht} \; . \; .$$

u. s. w. Glieder der Determinante. Insbesondere ist das Product der diagonalen Elemente $a_{11} \; a_{22} \; . \; . \; a_{nn}$ ein Glied der Determinante, das Anfangsglied derselben.

Alle Glieder der Determinante werden gebildet, indem man bei unveränderten Zeilen-Nummern des Systems die Colonnen-Nummern permutirt; dabei nimmt man jedesmal aus allen Zeilen je ein Element, so dass nicht zwei dieser Elemente einer Colonne angehören. Dieselben Glieder werden erhalten, wenn man bei unveränderten Colonnen-Nummern die Zeilen-Nummern permutirt; dabei nimmt man jedesmal aus allen Colonnen je ein Element, so dass nicht zwei dieser Elemente einer Zeile angehören. Man findet z. B. das Glied $\varepsilon a_{fr} \; a_{gs} \; a_{ht} \; . \; .$ sowohl dadurch, dass man aus den Zeilen $f, g, h, . \, .$ die Elemente der Colonnen $r, s, t, . \, .$ wählt, als auch dadurch, dass man aus den Colonnen $r, s, t, . \, .$ die Elemente der Zeilen $f, g, h, . \, .$ wählt; bei beiden Operationen hat $\varepsilon$ dieselbe Bedeutung. Das Anfangsglied der Determinante ist das Product der Elemente der Diagonalreihe

$$a_{11} \; a_{22} \; . \; . \; a_{nn}$$

Aus dem Anfangsglied werden die übrigen Glieder abgeleitet, indem man die ersten Nummern unverändert lässt und die zweiten permutirt.

Die Determinante eines Systems von $n^2$ Elementen heisst $n$ten Grades, weil ihre Glieder Producte von $n$ Elementen sind. Sie hat $1 . 2 . . . n$ Glieder, welche zur Hälfte $\varepsilon = 1$, zur andern Hälfte $\varepsilon = -1$ haben (§. 1, 3), unter denen aber gleiche oder entgegengesetzt gleiche nicht vorkommen, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen stattfinden. Man bezeichnet die Determinante nach Cauchy und Jacobi durch Einschluss des Systems der Elemente zwischen Colonnenstriche, oder durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summenzeichen gesetzte Anfangsglied, oder nach Vandermonde durch Aufstellung der

Reihe der ersten Nummern, welche zur Unterscheidung der Elemente dienen, über der Reihe der zweiten Nummern*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \,..\, a_{nn} = \frac{1 \mid 2 \mid .. \mid n}{1 \mid 2 \mid .. \mid n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & .. & n \\ 1 & 2 & .. & n \end{pmatrix}$$

**Beispiele.**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 + ab_2c_3d_1 - ab_2c_1d_3 + ab_3c_1d_2 - ab_3c_2d_1 \\ -a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d - a_1b_3cd_2 + a_1b_3c_2d \\ +a_2bc_1d_3 - a_2bc_3d_1 - a_2b_1cd_3 + a_2b_1c_3d + a_2b_3cd_1 - a_2b_3c_1d \\ -a_3bc_1d_2 + a_3bc_2d_1 + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d - a_3b_2cd_1 + a_3b_2c_1d \end{matrix}$$

**3. I.** Zwei Systeme von der Art, dass die Zeilen des einen mit den Colonnen des andern übereinstimmen,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \cdot\cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

haben dieselbe Determinante $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \,..\, a_{nn}$. Denn das Glied $\varepsilon a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht}$ .. der Determinante des einen Systems

---

*) Cauchy J. de l'école polyt. Cah. 17 p. 52. Jacobi Det. 4 und Crelle J. 15 p. 115. Vandermonde Mém. sur l'élimination 1771 (Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 517). Die Determinanten sind von Leibniz (l. c.) erfunden worden, der mit Hülfe derselben die Resultante von $n$ linearen Gleichungen für $n-1$ Unbekannte, sowie die Resultante von 2 algebraischen Gleichungen für eine Unbekannte darzustellen suchte. Als zweiter Erfinder der Determinanten ist Cramer (vergl. §. 1, 1) zu nennen. Die von Cauchy eingeführte Benennung Determinante ist von den nach dem obigen Gesetz gebildeten Aggregaten hergenommen, welche Gauss (Disquis. arithm.) Determinanten der quadratischen Formen genannt hat. Später hat Cauchy (Exerc. de Math., Exerc. d'Analyse) den Namen Determinante wieder mit fonction alternée und mit dem von Laplace (vergl. §. 1, 2) gebrauchten Ausdruck Resultante vertauscht.

ist ein Glied desselben Zeichens der Determinante des andern Systems (2).

II. Wenn im System der Elemente zwei parallele Reihen vertauscht werden, so wechselt die Determinante das Zeichen*). Es sei

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

und nach Vertauschung der ersten Zeile des Systems mit der zweiten

$$R' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

Wenn $\varepsilon a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht}$ .. ein Glied von $R$ ist, so ist $-\varepsilon a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht}$ .. ein Glied von $R'$, weil bei denselben Colonnen-Nummern die Zeilen-Nummern $fgh$ eine Permutation der einen Classe der Zeilen-Nummern 123.. des ersten Systems bilden und zugleich eine Permutation der andern Classe der Zeilen-Nummern 213.. des zweiten Systems. Also ist $R' = -R$.

III. Wenn zwei parallele Reihen des Systems übereinstimmen, so ist die Determinante des Systems identisch null. Denn man hat sowohl $R' = -R$, als auch $R' = R$, also $R = 0$ für alle Werthe der gegebenen Elemente.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & . & . & a_{2n} & a_{21} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n2} & . & . & a_{nn} & a_{n1} \\ a_{12} & . & . & a_{1n} & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{12} & . & . & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & . & . & a_{2n} & a_{21} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n2} & . & . & a_{nn} & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & . & . & a_{11} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{nn} & a_{n,n-1} & . & . & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

---

*) VANDERMONDE l. c. p. 518 u. 522. LAPLACE Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 297.

Ueberhaupt: wenn $ikl$ . . und $rst$ . . gegebene Permutationen von 123 . . bedeuten, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{ir} & a_{is} & a_{it} & . \\ a_{kr} & a_{ks} & a_{kt} & . \\ a_{lr} & a_{ls} & a_{lt} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ri} & a_{rk} & a_{rl} & . \\ a_{si} & a_{sk} & a_{sl} & . \\ a_{ti} & a_{tk} & a_{tl} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

wo $\varepsilon$ die positive oder die negative Einheit bedeutet, je nachdem die gegebenen Permutationen einer Classe angehören oder nicht.

**4.** Wenn man von dem System der $n^2$ Elemente $m$ Zeilen auswählt und von diesen ebensoviel Colonnen, so erhält man ein partiales System von $m^2$ Elementen, dessen Determinante eine Subdeterminante $m$ten Grades des gegebenen Systems heisst*). Es giebt $\binom{n}{m}$ Subdeterminanten $m$ten Grades einer Zeilen-Combination, $\binom{n}{m}^2$ des Systems, und ebensoviel Subdeterminanten $(n-m)$ten Grades. Demnach kommen bei dem gegebenen System in Betracht ausser der Determinante $n$ten Grades

$n^2$ Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades

$\binom{n}{2}^2$ Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades

u. s. w. Die Subdeterminanten 1ten Grades sind die einzelnen Elemente.

Nachdem man die Combinationen $m$ten Grades der Zeilen-Nummern und der Colonnen-Nummern beliebig durch die Zahlen 1 bis $\mu=\binom{n}{m}$ nummerirt hat, bezeichne man durch $p_{ik}$ die Determinante des partialen Systems, dessen Elemente der $i$ten Zeilen-Combination und der $k$ten Colonnen-Combination angehören. Dann ist

$$\begin{matrix} p_{11} & \cdot\ \cdot & p_{1\mu} \\ . & . & . \\ p_{\mu 1} & \cdot\ \cdot & p_{\mu\mu} \end{matrix}$$

das System der Subdeterminanten $m$ten Grades, welche zu dem gegebenen System von Elementen gehören. Z. B. $n=4$, $m=2$,

*) Dét. d'un système dérivé bei CAUCHY J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 96, partiale Determinante, Unterdeterminante bei den deutschen, minor determinant bei den englischen Mathematikern.

$$\cdot \mu = 6, \quad \underbrace{12}_{1} \quad \underbrace{13}_{2} \quad \underbrace{14}_{3} \quad \underbrace{23}_{4} \quad \underbrace{24}_{5} \quad \underbrace{34}_{6}$$

$$p_{25} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

5. Zwei Subdeterminanten eines Systems von $n^2$ Elementen, deren Grade sich zu $n$ ergänzen,

$$p_{ik} = \Sigma \pm a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,.\,. \quad \text{und} \quad q_{ik} = \Sigma \pm a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,.\,.$$

heissen adjungirt, eine die Adjuncte der andern, wenn das Product der Elemente $a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,.\,.\, a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,.\,.$ ein Glied der Determinante $\Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{nn}$ ist (2). Insbesondere sind ein Element und eine bestimmte Subdeterminante $(n-1)$ten Grades adjungirt, die Adjuncte des Elements $a_{ik}$ wird durch $\alpha_{ik}$ bezeichnet*). In Bezug auf das System

$$\begin{matrix} a_{11} & . & . & a_{15} \\ . & . & . & . \\ a_{51} & . & . & a_{55} \end{matrix}$$

sind adjungirt

$$\Sigma \pm a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55} \text{ und } a_{11}$$

$$\Sigma \pm a_{33}\, a_{44}\, a_{55} \text{ und } \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}$$

$$a_{34} \text{ und } \alpha_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} & a_{53} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} \\ a_{35} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

weil 3|1245 und 4|1253, 13|245 und 52|134 Permutationen derselben Classe der Reihen-Nummern des Systems sind.

In dem System

$$\begin{matrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{matrix} \quad \text{hat } a \text{ die Adjuncte} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Die Elemente $a_1$, $b$ haben dieselben Adjuncten, wie in den Systemen mit derselben Determinante (3)

---

*) Cauchy l. c. p. 64 hat diese Benennung aus der Theorie der quadratischen Formen (Gauss Disq. arithm. 267) aufgenommen und adjungirte Subdeterminanten complementär genannt.

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ c_1 & c_2 & c \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \\ a & a_1 & a_2 \end{matrix}$$

nämlich

$$\begin{vmatrix} b_2 & b \\ c_2 & c \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

In dem System

$$\begin{matrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix} \quad \text{hat } a \text{ die Adjuncte} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Die Elemente $a_1$, $b$ haben die entgegengesetzt gleichen Adjuncten, wie in den Systemen mit entgegengesetzt gleicher Determinante (3)

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \\ d_1 & d_2 & d_3 & d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}$$

nämlich

$$-\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b \\ c_2 & c_3 & c \\ d_2 & d_3 & d \end{vmatrix} \qquad -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Adjungirte Systeme sind

$$\begin{matrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

wenn $\alpha_{ik}$ die Adjuncte des Elements $a_{ik}$ bedeutet,

$$\begin{matrix} p_{11} & . & . & p_{1\mu} \\ . & . & . & . \\ p_{\mu 1} & . & . & p_{\mu\mu} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} q_{11} & . & . & q_{1\mu} \\ . & . & . & . \\ q_{\mu 1} & . & . & q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

wenn $p_{ik}$ und $q_{ik}$ adjungirte Subdeterminanten des Systems

$$\begin{matrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{matrix}$$

6. Das Product der adjungirten Subdeterminanten $m$ten und $(n-m)$ten Grades

$$p_{ik}\, q_{ik} = \Sigma \pm a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,..\, \Sigma \pm a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,..$$

hat $m!(n-m)!$ Glieder, welche Glieder der Determinante

$$R = \Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{nn}$$

sind. Das Anfangsglied des Products

$$a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,.\,.\, a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,.\,.$$

ist ein Glied von $R$ (5). Die Glieder $-a_{\beta f}\, a_{\alpha g} \,.\,.$ und $a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,.\,.$ der beiden Subdeterminanten geben das Glied $-a_{\beta f}\, a_{\alpha g} \,.\,.\, a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,.\,.$ des Products, ein Glied von $R$, weil $\beta\alpha \,.\,.\, \varrho\sigma \,.\,.$ und $fg \,.\,.\, tu \,.\,.$ Permutationen nicht derselben Classe der Zeilen-Nummern und der Colonnen-Nummern des Systems sind. U. s. w.

Daher sind die Glieder von $R$, welche die Elemente $a_{\alpha f}$, $a_{\beta g}$, . . enthalten, in der Formel $a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,.\,.\, \Sigma \pm a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,.\,.$ vereinigt. Die Glieder von $\Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{55}$, welche das Element $a_{34}$ enthalten, werden durch

$$a_{34}\, \alpha_{34} = a_{34}\, \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{45}\, a_{53}$$

ausgedrückt (5). Die Glieder, welche $a_{15}$, $a_{32}$ enthalten, werden durch

$$a_{15}\, a_{32}\, \Sigma \pm a_{21}\, a_{43}\, a_{54}$$

ausgedrückt; die Glieder, welche $a_{12}$, $a_{35}$ enthalten, werden durch

$$-a_{12}\, a_{35}\, \Sigma \pm a_{21}\, a_{43}\, a_{54} = a_{12}\, a_{35}\, \Sigma \pm a_{23}\, a_{41}\, a_{54}$$

ausgedrückt. U. s. w.

## §. 3. Entwickelung der Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen.

1. Aus zwei gegebenen Systemen

$$\begin{matrix} a_{11} \,.\,.\, a_{1n} \\ a_{21} \,.\,.\, a_{2n} \\ .\;.\;.\;. \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} b_{11} \,.\,.\, b_{1n} \\ b_{21} \,.\,.\, b_{2n} \\ .\;.\;.\;. \end{matrix}$$

wird ein drittes System

$$\begin{matrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{12} + \cdots + a_{1n}\, b_{1n} & a_{11}\, b_{21} + a_{12}\, b_{22} + \cdots + a_{1n}\, b_{2n} & \cdots \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{12} + \cdots + a_{2n}\, b_{1n} & a_{21}\, b_{21} + a_{22}\, b_{22} + \cdots + a_{2n}\, b_{2n} & \cdots \\ .\;.\;. & .\;.\;. & \cdots \end{matrix}$$

c o m p o n i r t (durch Composition ihrer Zeilen formirt), indem man die Elemente je einer Zeile des ersten Systems mit den Elementen je einer Zeile des andern Systems der Reihe nach multiplicirt und durch Addition der Producte je ein Element des componirten Systems bildet. Die Elemente des componirten Systems sind bilineare Formen der Elemente $a$ und der Elemente $b$. Z. B. aus den

Systemen

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \end{matrix}$$

wird das System componirt

$$\begin{matrix} ax + by + c & ax' + by' + c \\ a'x + b'y + c' & a'x' + b'y' + c' \end{matrix}$$

2. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und $\alpha_{ik}$ die Adjuncte des Elements $a_{ik}$ ist, wenn demnach

$$\begin{matrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

adjungirte Systeme sind (§. 2, 5), so findet man durch Composition einer Zeile (Colonne) des einen Systems mit einer Zeile (Colonne) des andern Systems entweder $R$ oder 0, je nachdem man Reihen derselben Nummer oder nicht derselben componirt. Die Determinante ist eine lineare Form der Elemente einer Reihe *).

**Beweis.** Die Glieder der Determinante enthalten je eines der Elemente $a_{i1}$, $a_{i2}$, .. einer Zeile, sowie je eines der Elemente $a_{1k}$, $a_{2k}$, .. einer Colonne. Die Glieder der Determinante, welche das Element $a_{ik}$ enthalten, werden durch $a_{ik}\,\alpha_{ik}$ ausgedrückt (§. 2, 6). Also umfasst die Summe

$$a_{i1}\,\alpha_{i1} + \cdots + a_{in}\,\alpha_{in} \quad \text{oder} \quad a_{1k}\,\alpha_{1k} + \cdots + a_{nk}\,\alpha_{nk}$$

alle Glieder von $R$, jedes einfach. Demnach ist

$$a_{k1}\,\alpha_{i1} + \cdots + a_{kn}\,\alpha_{in} \quad \text{oder} \quad a_{1i}\,\alpha_{1k} + \cdots + a_{ni}\,\alpha_{nk}$$

die Determinante des Systems, welches aus dem gegebenen dadurch abgeleitet wird, dass man die Elemente $a_{i1}$, $a_{i2}$, .. durch $a_{k1}$, $a_{k2}$, .. oder die Elemente $a_{1k}$, $a_{2k}$, .. durch $a_{1i}$, $a_{2i}$, .. ersetzt. Die Zeilen (Colonnen) dieses Systems sind nicht alle von einander verschieden, also ist die Determinante dieses Systems null (§. 2, 3).

**Beispiele.** Wenn die Systeme

$$\begin{matrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix}$$

*) Cramer l. c. Lagrange Pyram. 7 (Mém. de Berlin 1773). Cauchy l. c. p. 66. Jacobi Det. 6.

adjungirt sind, wenn $R$ die Determinante des ersten Systems, $\alpha$ die Adjuncte des Elements $a$, u. s. w.

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b \\ c_2 & c \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \beta_1 = \begin{vmatrix} c_2 & c \\ a_2 & a \end{vmatrix} \quad \beta_2 = \begin{vmatrix} c & c_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix}.$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a \\ b_2 & b \end{vmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}$$

so findet man

$$\begin{array}{ll} a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = R & a\alpha + b\beta + c\gamma = R \\ b\alpha + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 = 0 & a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0 \\ c\alpha + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0 & a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = 0 \end{array}$$

u. s. w. Zur Ausrechnung der Determinante genügt eine Zeile (Colonne) der Adjuncten.

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b \\ c_2 & c_3 & c \\ d_2 & d_3 & d \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b & b_1 \\ c_3 & c & c_1 \\ d_3 & d & d_1 \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \\ d & d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

3. Wenn alle Elemente einer Reihe des gegebenen Systems null sind, so ist die Determinante des Systems null. Wenn unter den Elementen einer Reihe nur eines nicht null ist, so ist die Determinante das Product dieses Elements mit seiner Adjuncte; die übrigen Glieder der Determinante fallen weg.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = (-1)^4 c_2 \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ b & b_1 & b_3 \\ d & d_1 & d_3 \end{vmatrix}$$

Bei der Vertauschung der 3ten Zeile des Systems mit den vorhergehenden Zeilen und der 3ten Colonne mit den vorhergehenden wechselt die Determinante 4mal das Zeichen. In dem System

$$\begin{array}{cccc} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{array} \quad \text{hat } c_2 \text{ die Adjuncte} \quad \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a & a_1 & 0 & a_3 \\ b & b_1 & 0 & b_3 \\ c & c_1 & 1 & c_3 \\ d & d_1 & 0 & d_3 \end{vmatrix}$$

Wenn alle Elemente einerseits der Diagonale null sind, so bleibt nur das Anfangsglied der Determinante übrig.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . \\ 0 & 0 & a_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & . \\ 0 & a_{33} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots$$

Umgekehrt: Wenn dem gegebenen System der Rand

$$\begin{matrix} 1\ 0\ 0\ . \\ x \\ y \\ . \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} 1\ x\ y\ . \\ 0 \\ 0 \\ . \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} . \\ y \\ x \\ .\ 0\ 0\ 1 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} . \\ 0 \\ 0 \\ .\ y\ x\ 1 \end{matrix}$$

zugesetzt wird, so bleibt seine Determinante unverändert. Eine Determinante $n$ten Grades kann als Determinante $(n+1)$ten Grades mit $n$ beliebigen Elementen dargestellt werden.

$$\begin{vmatrix} a & a' & . \\ b & b' & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & . \\ 0 & a & a' & . \\ 0 & b & b' & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

4. Um eine Determinante mit einem Factor zu multipliciren, hat man alle Elemente einer Reihe mit demselben zu multipliciren. Den gemeinschaftlichen Factor aller Elemente einer Reihe kann man vor die Determinante setzen.

$$p \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & b & c \\ pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & pb & pc \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Diess ergiebt sich, wenn die Determinante unter der Form $a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ oder $a\alpha + b\beta + c\gamma$ vorgestellt wird. Ferner ist

$$- \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b \\ -a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & pa & a_2 \\ b & pb & b_2 \\ c & pc & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn die Elemente einer Colonne (Zeile) des Systems sich zu einander verhalten, wie die Elemente einer andern Colonne (Zeile), so ist die Determinante identisch null.

Man findet

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

indem man die erste Colonne mit $abcd$ multiplicirt, und die Zeilen durch $a, b, c, d$ dividirt;

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

indem man die 3 letzten Zeilen mit $abc$ multiplicirt, und dann die erste Colonne durch $abc$, die 2te, 3te, 4te Zeile und Colonne durch $a, b, c$ dividirt.

5. Wenn in einem System von $n^2$ Elementen die Elemente, welche symmetrisch zur Diagonale stehn, z. B. $a_{ik}$ und $a_{ki}$ gleich sind oder entgegengesetzt gleich oder conjugirt complex, so haben die Determinanten $m$ten Grades von Systemen der Art, dass die Zeilen- und die Colonnen-Nummern des einen mit den Colonnen- und den Zeilen-Nummern des andern übereinstimmen,

$$P = \begin{vmatrix} a_{\alpha f} & a_{\alpha g} & \cdot \\ a_{\beta f} & a_{\beta g} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\beta} & \cdot \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

unter einander einen einfachen Zusammenhang.

I. Wenn $a_{ki} = a_{ik}$, so ist

$$P = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{g\alpha} & \cdot \\ a_{f\beta} & a_{g\beta} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\alpha} & \cdot \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & \cdot \\ \cdot & & \end{vmatrix} = Q$$

(§. 2, 3). Insbesondere haben in diesem System, welches symmetrisch genannt wird, $a_{ik}$ und $a_{ki}$ dieselbe Adjuncte.

II. Wenn $a_{ki} = -a_{ik}$ und $a_{ii} = 0$, so ist

$$P = \begin{vmatrix} -a_{f\alpha} & -a_{g\alpha} & \cdot \\ -a_{f\beta} & -a_{g\beta} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = (-1)^m Q$$

Bei geradem $m$ ist $P = Q$. Bei ungeradem $n$ haben in diesem System, welches nach Cayley Crelle J. 32 p. 119 gauche, skew, gobbo genannt wird, $a_{ik}$ und $a_{ki}$ dieselbe Adjuncte. Bei

ungeradem $m$ ist $P = -Q$, bei geradem $n$ haben $a_{ik}$ und $a_{ki}$ entgegengesetzt gleiche Adjuncten.

Wenn $fg$ . . eine Permutation von $\alpha\beta$ . . ist, so hat man (§. 2, 3)

$$P = \varepsilon \Sigma \pm a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} \ldots = Q$$

bei ungeradem $m$ ist also $P$ identisch null*).

III. Wenn $a_{ik}$ und $a_{ki}$ conjugirt complex sind und $a_{ii}$ real, so geht durch Vertauschung von $\sqrt{-1}$ mit $-\sqrt{-1}$ die Determinante $P$ über in $Q$ d. h. $P$ und $Q$ sind conjugirt complex. Bei derselben Vertauschung bleibt $\Sigma \pm a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}$ . . unverändert, also ist diese Determinante real**).

6. Wenn die Elemente einer Reihe Aggregate von $m$ Gliedern sind, so ist die Determinante das Aggregat von $m$ Determinanten. Wenn z. B. $a_{i1} = p_i + q_i + \ldots$, so ist

$$R = \begin{vmatrix} p_1 + q_1 + \cdots & a_{12} & \cdot \\ p_2 + q_2 + \cdots & a_{22} & \cdot \\ \cdots & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & a_{12} & \cdot \\ p_2 & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & a_{12} & \cdot \\ q_2 & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} + \cdots$$

weil (2)

$$\begin{aligned} R = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \cdots = \quad & p_1 \alpha_{11} + q_1 \alpha_{11} + \cdots \\ + & p_2 \alpha_{21} + q_2 \alpha_{21} + \cdots \\ + & \cdot \; \cdot \quad + \cdot \; \cdot \end{aligned}$$

Die einzelnen Determinanten, in welche $R$ sich zerlegen lässt, entspringen aus $R$, indem an die Stelle der Elemente

$$a_{11} \quad a_{21} \quad \ldots \quad a_{n1}$$

die Glieder derselben

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdot\cdot \\ q_1 & q_2 & \cdot\cdot \end{matrix}$$

u. s. w. der Reihe nach gesetzt werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a + a' & a_1 & a_2 \\ b + b' & b_1 & b_2 \\ c + c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & b' & b'' \\ 0 & c' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

---

*) Jacobi Crelle J. 2 p. 354.

**) Hermite Comptes rendus t. 41 p. 181. Crelle J. 52 p. 40.

7. Der Werth einer Determinante wird nicht verändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Factor multiplicirten Elemente einer parallelen Reihe addirt*)

$$\begin{vmatrix} a+pb & b & c \\ a_1+pb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b & b & c \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

(vergl. 3. u. 2.), wovon die zweite Determinante identisch verschwindet (§. 2, 4).

**Beispiele.**

$$\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4x+b_4y+c_4z & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b \\ x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-a & b-b \\ 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \text{ (vergl. 3)}$$

$$\begin{vmatrix} a-x & a'-x & \cdot \\ b-x & b'-x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 0 & a-x & a'-x & \cdot \\ 0 & b-x & b'-x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot \\ x & a & a' & \cdot \\ x & b & b' & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' & \cdot \\ b & b' & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & a & a' & \cdot \\ 1 & b & b' & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_1-u_0x & u_2-u_1x & \cdot \\ u_2-u_1x & u_3-u_2x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_1 & \cdot \\ 0 & u_1-u_3x & u_2-u_1x & \cdot \\ 0 & u_2-u_1x & u_3-u_2x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_1 & \cdot \\ x & u_1 & u_2 & \cdot \\ x^2 & u_2 & u_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \text{**)}$$

Die zweite Zeile wird transformirt, indem man die erste Zeile mit $x$ multiplicirt addirt; die dritte Zeile wird transformirt, indem man die transformirte zweite Zeile mit $x$ multiplicirt addirt; u. s. w.

---

*) Jacobi Crelle J. 22 p. 371.

**) Jacobi Crelle J. 30 p. 129.

Wenn man in der Determinante $n$ten Grades

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & \cdot\,\cdot & a_n \\ b_1 & \cdot\,\cdot & b_n \\ c_1 & \cdot\,\cdot & c_n \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

die $n$te Colonne mit $a_{n-1}$ multiplicirt und dann von dieser Colonne die mit $a_n$ multiplicirte vorhergehende Colonne subtrahirt; wenn man auf dieselbe Weise die $(n-1)$te, .. Colonne transformirt, so findet man

$$a_1 \,.\,.\, a_{n-1}\, S = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 a_2 - a_2 a_1 & \cdot\,\cdot & a_{n-1} a_n - a_n a_{n-1} \\ b_1 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & \cdot\,\cdot & a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} \\ c_1 & a_1 c_2 - a_2 c_1 & \cdot\,\cdot & a_{n-1} c_n - a_n c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und daher die Determinante $(n-1)$ten Grades

$$a_2 \,.\,.\, a_{n-1}\, S = \begin{vmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 & \cdot\,\cdot & a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 & \cdot\,\cdot & a_{n-1} c_n - a_n c_{n-1} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Wenn die Elemente ganze Zahlen sind, so kann die Determinante ohne Multiplication reducirt werden, indem man einzelne Reihen durch Verbindung mit parallelen Reihen transformirt, bis dass ein Element $\pm 1$ geworden ist*).

$$\begin{vmatrix} 13 & 28 & 5 \\ 9 & 5 & 9 \\ 4 & 14 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & -22 \\ 9 & 5 & 11 \\ 4 & 14 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 131 & 209 \\ 4 & 70 & 97 \end{vmatrix}$$

Von der 1ten Zeile wurde die 3te Zeile 3fach subtrahirt, zur 2ten und 3ten Colonne wurde die 1te Colonne 14fach und 22fach addirt.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

*) Vergl. Kronecker Berl. Monatsbericht 1866 p. 609.

ist durch $a+b+c+d$, $a-b-c+d$, $a-b+c-d$, $a+b-c-d$ theilbar, also auch durch das Product dieser Factoren. Der Quotient ist 1.

Unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ a'x + b'y + c'z &= k' \\ a''x + b''y + c''z &= k'' \end{aligned}$$

findet man

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} ax + by + cz & b & c \\ a'x + b'y + c'z & b' & c' \\ a''x + b''y + c''z & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & b & c \\ k' & b' & c' \\ k'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

abgekürzt

$$(abc)x = (kbc), \quad (abc)y = (akc), \quad (abc)z = (abk)$$

Wenn $k, k', k''$ null sind, so sind entweder $x, y, z$ null oder $(abc) = 0$.

8. Wenn das System die Determinante 0 hat, so verhalten sich die Adjuncten einer Zeile (Colonne) zu einander, wie die Adjuncten jeder andern Zeile (Colonne)*). Die Determinanten der Systeme

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

werden durch $(abcd)$, $(abc)$ bezeichnet, in dem ersten System hat $a$ die Adjuncte $\alpha$, u. s. w. Dann ist

$$\begin{aligned} (acd)\alpha + (bcd)\beta &= (a\alpha + b\beta \;\; c \;\; d) \text{ nach (6)} \\ &= (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta \;\; c \;\; d) \text{ nach (7)} \\ &= (abcd) \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \text{ nach (2 u. 3)} \\ (acd)\alpha_1 + (bcd)\beta_1 &= 0 \text{ nach (3)} \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $(abcd) = 0$ und $(acd)$ nicht null findet man daher

$$\alpha : \beta = \alpha_1 : \beta_1 \quad \text{und} \quad \alpha : \alpha_1 = \beta : \beta_1$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0$$

*) Dieser Satz fliesst aus den algebraischen Bemerkungen Jacobi's Crelle J. 15 p. 104 und Det. 7.

Ueberhaupt sind für das System der Adjuncten

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{matrix}$$

alle Determinanten 2ten und höhern Grades null (4). Vergl. unten §. 7, 2 u. 7.

9. Indem man Determinanten, welche identisch null sind (7), nach den Elementen einer Reihe entwickelt (2), erhält man Identitäten von vielfältiger Anwendbarkeit.

$$(b-c)(a-d) + (c-a)(b-d) + (a-b)(c-d) = \begin{vmatrix} a-d & a & 1 \\ b-d & b & 1 \\ c-d & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{*)}$$

Bezeichnet man

$$\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}$$

durch $(abc)$, so ist

$$(bcd)(a-d) + (cad)(b-d) + (abd)(c-d) = \begin{vmatrix} a-d & a & a' & 1 \\ b-d & b & b' & 1 \\ c-d & c & c' & 1 \\ d-d & d & d' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ferner ist bei beliebigen $x$, $y$, $z$

$$\begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z & a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn nun

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 \end{vmatrix} = (156)$$

u. s. w., so erhält man durch Entwickelung der Determinante nach den Elementen der ersten Colonne

$$(234)(156) + (314)(256) + (124)(356) - (123)(456) = 0 \text{**)}$$

*) Bézout Equat. algébr. 1779 §. 220.

**) Die entsprechenden geometrischen Sätze hat Monge 1809 abgeleitet (J. de l'école polyt. Cah. 15 p. 68), auf andrem Wege Möbius baryc. Calcul §. 166 u. 171. Ihren Zusammenhang mit der Lehre von den Doppelverhältnissen findet man angegeben in des Verf. Elem. d. Math. VI §. 7, 12—13.

Dieselben Resultate ergeben sich auf folgendem Wege*). Aus den Systemen

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & .. & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b_{11} & .. & b_{1n} \\ . & .. & . \\ b_{n1} & .. & b_{nn} \end{array}$$

werden 2mal $n$ Systeme abgeleitet, indem man im ersten System alle Colonnen der Reihe nach durch eine bestimmte Colonne $i$ des zweiten Systems, und im zweiten System eine bestimmte Colonne $k$ der Reihe nach durch alle Colonnen des ersten Systems ersetzt. Die Determinanten der gegebenen Systeme werden durch $R$ und $S$ bezeichnet, die Adjuncten der Elemente $a_{ik}$ und $b_{ik}$ durch $\alpha_{ik}$ und $\beta_{ik}$, die Determinanten der abgeleiteten Systeme durch $t_{i1}$, $t_{i2}$, .. und $u_{1k}$, $u_{2k}$, ... Dann ist

$$\begin{array}{ll} t_{i1} = b_{1i}\alpha_{11} + b_{2i}\alpha_{21} + .. & u_{1k} = a_{11}\beta_{1k} + a_{21}\beta_{2k} + .. \\ t_{i2} = b_{1i}\alpha_{12} + b_{2i}\alpha_{22} + .. & u_{2k} = a_{12}\beta_{1k} + a_{22}\beta_{2k} + .. \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

folglich (2)

$$\begin{array}{l} t_{i1}a_{11} + t_{i2}a_{12} + .. = b_{1i}R \\ t_{i1}a_{21} + t_{i2}a_{22} + .. = b_{2i}R \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

und daher

$$t_{i1}(a_{11}\beta_{1k} + a_{21}\beta_{2k} + ..) + t_{i2}(a_{12}\beta_{1k} + a_{22}\beta_{2k} + ..) + ..$$

$$\text{d. i. } t_{i1}u_{1k} + t_{i2}u_{2k} + .. = R(b_{1i}\beta_{1k} + b_{2i}\beta_{2k} + ..)$$

Durch Composition der Reihen $t_{i1}$, $t_{i2}$, .. und $u_{1k}$, $u_{2k}$ findet man also $RS$, wenn $k = i$, oder 0, wenn $k$ von $i$ verschieden. Z. B.

$$(5234)(1678) + (1534)(2678) + (1254)(3678) + (1235)(4678) = (1234)(5678)$$

$$(5234)(5178) + (1534)(5278) + (1254)(5378) + (1235)(5478) = 0$$

10. Wenn man

$$\binom{b}{k} = \frac{b(b-1)\,..\,(b-k+1)}{1\,.\,2\quad..\quad k}$$

setzt, so ist

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & .. & \binom{c+2m-1}{m} \\ 1 & \binom{c+m+1}{1} & \binom{c+m+2}{2} & .. & \binom{c+2m}{m} \\ . & . & . & .. & . \\ 1 & \binom{c+2m}{1} & \binom{c+2m+1}{2} & .. & \binom{c+3m-1}{m} \end{vmatrix} = 1$$

---

*) Sylvester Philos. Mag. 1851, II p. 142 und 1852, II p. 342. Vergl. Brioschi Det. (39) und (63).

Denn zufolge der Identität

$$\binom{c+n}{k} - \binom{c+n-1}{k} = \binom{c+n-1}{k-1}$$

erhält man nach Verminderung jeder Zeile um die vorhergehende

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & \cdot\cdot & \binom{c+2m-1}{m} \\ 0 & 1 & \binom{c+m+1}{1} & \cdot\cdot & \binom{c+2m-1}{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \binom{c+2m}{1} & \cdot\cdot & \binom{c+3m-2}{m-1} \end{vmatrix}$$

Vollzieht man dieselbe Operation an den letzten $m-1$, $m-2$, . . Zeilen, so werden alle Elemente der Diagonale 1, während alle Elemente einerseits der Diagonale verschwinden. Daher ist $R = 1$, unabhängig von $c$ und $m$.

11. Multiplicirt man in dem System (die leeren Stellen des Systems enthalten Nullen)

$$B = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & & & & \\ a_1 & -b_0 & b_2 & & & \\ a_2 & & -b_1 & b_3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_{n-1} & & & & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & & & & & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

die Zeilen der Reihe nach mit $b_0$, $b_1$, . ., $b_n$, und addirt dann zu jeder Zeile die folgenden Zeilen, so erhält man ein System, dessen Determinante sich auf ihr Anfangsglied reducirt, so dass

$$b_0 b_1 \,.\,.\, b_n B = (-1)^n (a_0 b_0 + \cdot\cdot\cdot + a_n b_n)\, b_0 b_1 \,.\, b_1 b_2 \,.\,.\, b_{n-1} b_n$$

Daher ist*)

$$B = (-1)^n (a_0 b_0 + \cdot\cdot\cdot + a_n b_n)\, b_1 b_2 \,.\,.\, b_{n-1}$$

Aehnliche Form haben die Systeme, deren Determinanten die Nenner und die Zähler der Näherungs-Brüche für einen gegebenen Kettenbruch sind. Vergl. unten §. 8, 3.

12. Wenn die Elemente $a_{ik}$ und $a_{ki}$ gleich sind, und jedes in der Diagonale stehende Element $a_{ii}$ der Summe der mit ihm in einer Reihe stehenden Elemente entgegengesetzt gleich ist, so ist die Determinante des Systems null, und alle Elemente haben gleiche Adjuncten**).

---

*) Hermite 1849 Liouv. J. 14 p. 26.

**) Borchardt Berl. Monatsbericht 1859 p. 380 und Crelle J. 57 p. 114.

**Beweis.** Alle Elemente einer Zeile des Systems

$$\begin{matrix} a_{00} & \cdot\,\cdot & a_{0n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n0} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

verschwinden zufolge der Voraussetzung, nachdem man zu derselben Zeile alle übrigen Zeilen des Systems addirt hat. Also ist die Determinante des Systems null.

Wenn man in dem System, dessen Determinante die Adjuncte $\alpha_{00}$ des Elements $a_{00}$ ist,

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

zur $i$ten Zeile die übrigen Zeilen addirt, so kommen in die $i$te Zeile die Elemente

$$-a_{01} \quad -a_{02} \quad \cdot\,\cdot \quad -a_{0n}$$

Addirt man nun zur $k$ten Colonne die übrigen Colonnen, so erhält man in der $k$ten Colonne die Elemente

$$-a_{10} \quad \cdot\,\cdot \quad -a_{i-1,0} \quad a_{00} \quad -a_{i+1,0} \quad \cdot\,\cdot \quad -a_{n0}$$

Indem man noch die transformirten Reihen voranstellt, findet man (3)

$$\alpha_{00} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{00} & \cdot\,\cdot & a_{0,k-1} & a_{0,k+1} & \cdot\,\cdot & a_{0n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & & & & \\ a_{i-1,0} & \cdot\,\cdot & & & & \\ a_{i+1,0} & \cdot\,\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\,\cdot & & & & \\ a_{n0} & \cdot\,\cdot & & & & \end{vmatrix} = \alpha_{ik}$$

**13.** Die Determinante $n$ten Grades eines aus $2n-1$ Grössen gebildeten Systems

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot\,\cdot & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdot\,\cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \cdot\,\cdot & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

bleibt unverändert, wenn an die Stelle der Grössen die Anfangsglieder ihrer Differenzen-Reihen gesetzt werden*).

**Beweis.** Man bilde aus der Reihe der gegebenen Grössen die Reihen ihrer ersten, zweiten, . . Differenzen, indem man jedes Glied von dem folgenden subtrahirt:

*) H. HANKEL über eine besondre Classe der symmetrischen Determinanten. Göttingen 1861.

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ & \Delta_1 & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \ldots \\ & & \Delta_2 & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \ldots \\ & & & \Delta_3 & \Delta_{31} & \ldots \\ & & & & \Delta_4 & \ldots \\ & & & & & \ldots \end{array}$$

Subtrahirt man nun von der $n$ten, $(n-1)$ten, . . Colonne des gegebenen Systems die jedesmal vorhergehende, so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \ldots & \Delta_{1,n-2} \\ a_1 & \Delta_{11} & \ldots & \Delta_{1,n-3} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \ldots & \Delta_{1,2n-3} \end{vmatrix}$$

Indem man dieselbe Operation wiederholt an den neuen Colonnen vollzieht, findet man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \ldots & \Delta_{n-1} \\ a_1 & \Delta_{.1} & \Delta_{21} & \ldots & \Delta_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \Delta_{2,n-1} & \ldots & \Delta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Führt man die angegebene Reihe von Operationen auch an den Zeilen des zuletzt gefundenen Systems aus, so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \ldots & \Delta_{n-1} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \ldots & \Delta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \Delta_{n-1} & \Delta_n & \Delta_{n+1} & \ldots & \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}$$

was zu beweisen war.

Wenn insbesondre $a_k$ eine ganze Function $m$ten Grades von $k$ mit dem obersten Coefficienten 1 ist, so bilden wie bekannt die Grössen $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, und die Glieder ihrer $m$ten Differenzen-Reihe haben den gemeinschaftlichen Werth $\Delta_m = 1.2\ldots m$, weshalb $\Delta_{m+1}$, $\Delta_{m+2}$, . . verschwinden. Wenn nun $n-1 = m$, so wird (3 und §. 2, 3)

$$P = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} (1.2\ldots m)^{m+1}$$

während $P$ verschwindet, wenn $n-1 < m$. In beiden Fällen können statt der Grössen $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . auch die Grössen $a_i$, $a_{i+1}$, $a_{i+2}$, gesetzt werden.

Wenn z. B. $c$ eine beliebige Zahl ist und

$$a_k = \binom{c+k+m}{m} = \frac{(c+k+m)(c+k+m-1)\ldots(c+k+1)}{1.2\ldots m}$$

so hat man

$$P = \begin{vmatrix} \binom{c+m}{m} & \binom{c+m+1}{m} & \cdot\cdot & \binom{c+2m}{m} \\ \binom{c+m+1}{m} & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \binom{c+2m}{m} & \cdot & \cdot\cdot & \binom{c+3m}{m} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

**14. Partiale Differentiale einer Determinante.** Wenn unter den Elementen des Systems nur $a_{ik}$ sich ändert, so ändert sich in der Determinante $R$ nur das Product $a_{ik}\,\alpha_{ik}$, und von diesem nur der erste Factor. Also ist*)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik}$$

Wenn unter den Elementen, welche $\alpha_{ik}$ enthält, nur $a_{rs}$ sich ändert, so ist das Product

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial a_{rs}}\, a_{rs} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik}\,\partial a_{rs}}\, a_{rs}$$

das Aggregat der Glieder von $\alpha_{ik}$, welche das Element $a_{rs}$ enthalten, und

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik}\,\partial a_{rs}}\, a_{ik}\, a_{rs}$$

das Aggregat der Glieder von $R$, welche die Elemente $a_{ik}$, $a_{rs}$ enthalten. U. s. w.

Demnach sind adjungirt (§. 2, 5)

$$a_{ik} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{is} \\ a_{rk} & a_{rs} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik}\,\partial a_{rs}}$$

$$\frac{\partial^{n-m} R}{\partial a_{\varrho t}\,\partial a_{\sigma u}\ldots} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^m R}{\partial a_{\alpha f}\,\partial a_{\beta g}\ldots}$$

unter der Voraussetzung, dass $a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \ldots a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \ldots$ ein Glied der Determinante $R$ ist. Daher hat man

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{is}\,\partial a_{rk}} = -\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik}\,\partial a_{rs}} \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn die Elemente des Systems nicht alle von einander

*) JACOBI Det. 6. 10.

unabhängig sind, z. B. $a_{kl} = \varepsilon a_{ik}$, so ist

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} da_{ik} = \left(\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} + \frac{\partial R}{\partial a_{ki}} \frac{da_{ki}}{da_{ik}}\right) da_{ik}$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} + \varepsilon \alpha_{ki}$$

Wenn $a_{ki} = a_{ik}$, so ist $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ (5), daher*)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = 2\alpha_{ik}$$

Wenn $a_{ki} = - a_{ik}$, $a_{ii} = 0$, und $n$ gerade, so ist $\alpha_{ki} = - \alpha_{ik}$,

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = 2\alpha_{ik}$$

Bei ungeradem $n$ sind die Determinante und ihre Differentialcoefficienten identisch null.

15. **Differential einer Determinante.** Wenn alle Elemente des Systems sich ändern, so ist das vollständige Differential der Determinante**)

$$dR = \Sigma \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} da_{ik} = \Sigma \alpha_{ik} da_{ik} \quad (i, k = 1, 2, ..)$$

$$= \Sigma \alpha_{i1} da_{i1} + \Sigma \alpha_{i2} da_{i2} + .. \quad (i = 1, 2, ..)$$

$$= \begin{vmatrix} da_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ da_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ da_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & da_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & da_{22} & a_{23} & . \\ a_{31} & da_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + ..$$

die Summe von $n$ Determinanten, die man aus $R$ ableitet, indem man die Elemente je einer unter den parallelen Reihen durch deren Differentiale ersetzt.

**Beispiele.**

$$v = \frac{M}{N} \qquad N^2 dv = \begin{vmatrix} dM & M \\ dN & N \end{vmatrix}$$

$$d \begin{vmatrix} dM & M \\ dN & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^2M & M \\ d^2N & N \end{vmatrix}$$

$$R = \Sigma \pm a_{11} .. a_{44} = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix}$$

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 20.

**) Jacobi Det. 6.

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial a} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = \frac{\partial R}{\partial a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{23}}\frac{\partial a_{23}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{31}}\frac{\partial a_{31}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{42}}\frac{\partial a_{42}}{\partial b}$$

$$= 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{42}$$

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \alpha_{13} + \alpha_{24} + 2\alpha_{32} + 2\alpha_{43}$$

$$\frac{\partial R}{\partial d} = \alpha_{33} + \alpha_{44}$$

Wenn $du = u_1 dx + u_2 dy$, $du_1 = u_{11} dx + u_{12} dy, \ldots$, und wenn, nachdem $u$ einen constanten Werth erhalten hat, $dy = y' dx$, $dy' = y'' dx$ ist, so findet man

$$y' = \frac{-u_1}{u_2} \qquad u_2^2 y'' dx = \begin{vmatrix} u_1 & du_1 \\ u_2 & du_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_{11} + u_{12} y' \\ u_2 & u_{12} + u_{22} y' \end{vmatrix} dx$$

$$u_2^3 y'' = \begin{vmatrix} 0 & u_1 + u_2 y' & u_2 \\ u_1 & u_{11} + u_{12} y' & u_{12} \\ u_2 & u_{12} + u_{22} y' & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}$$

Die Determinante eines Systems, dessen Colonnen $n$ gegebene Functionen von $x$ und deren 1te, 2te, .., $(n-1)$te Differentialcoefficienten sind,

$$R = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

hat die Eigenschaft, mit $y^n$ multiplicirt zu werden, wenn man die gegebenen Functionen durch ihre Producte mit einer beliebigen Function $y$ von $x$ ersetzt*).

$$\begin{vmatrix} y_1 y & (y_1 y)_1 & \cdot\cdot & (y_1 y)_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n y & (y_n y)_1 & \cdot\cdot & (y_n y)_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix} y^n$$

Denn es ist nach der Regel für die Differentiation eines Products

$$(y_i y)_1 = y_{i1} y + y_i y', \quad (y_i y)_2 = y_{i2} y + 2 y_{i1} y' + y_i y'', \ldots$$

also die gesuchte Determinante eine Summe von Determinanten (6). Die erste derselben ist theilbar durch $y^n$, die übrigen sind null (4).

Wenn man in dem gegebenen System die Elemente der $n-1$ ersten Colonnen durch ihre Differentialcoefficienten ersetzt, so wird

*) Hesse Crelle J. 54 p. 249 und Christoffel 55 p. 298. Vergl. Frobenius Crelle J. 77 p. 245.

die Determinante null. Also ist*)

$$\frac{dR}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-2} & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-2} & y_{nn} \end{vmatrix}$$

Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ von einander unabhängig, und

$$R_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdot\cdot & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

so findet man

$$\frac{\partial R_n}{\partial t_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^{n-1} R_n}{\partial t_1 \ldots \partial t_{n-1}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2t_{n-1} & \cdot\cdot & (n-1)t_{n-1}^{n-2} \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}.1.2\ldots(n-1)R_{n-1}$$

Ebenso ergiebt sich

$$f(t_1)^2 \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{R_n}{f(t_1)}\right) = \begin{vmatrix} -f'(t_1) & f(t_1)-t_1 f'(t_1) & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2}f(t_1)-t_1^{n-1}f'(t_1) \\ 1 & t_2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$f(t_1)^2 f(t_2)^2 \ldots f(t_n)^2 \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}\left(\frac{R_n}{f(t_1)\ldots f(t_n)}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -f'(t_1) & f(t_1)-t_1 f'(t_1) & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2}f(t_1)-t_1^{n-1}f'(t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ -f'(t_n) & f(t_n)-t_n f'(t_n) & \cdot\cdot & (n-1)t_n^{n-2}f(t_n)-t_n^{n-1}f'(t_n) \end{vmatrix}$$

Febr. 19 1893

## §. 4. Entwickelung der Determinante nach den Subdeterminanten einer Combination paralleler Reihen.

1. Wenn man die Subdeterminanten der $i$ten Zeilen-Combination $m$ten Grades (§. 2, 4) $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{i\mu}$ mit den Adjuncten

*) Malmstén Crelle J. 39 p. 91.

der entsprechenden Subdeterminanten der $k$ten Zeilen-Combination $q_{k1}, q_{k2}, \ldots, q_{k\mu}$ componirt, so erhält man entweder die Determinante $R$ des gegebenen Systems oder 0, je nachdem $k = i$ oder $k$ von $i$ verschieden. Dasselbe gilt in Bezug auf Colonnen-Combinationen. Vergl. §. 3, 2*).

**Beweis.** Die Glieder der Determinante $R$ enthalten von der $i$ten Zeilen-Combination die Elemente entweder der 1ten Colonnen-Combination, oder der 2ten, oder der 3ten, u. s. w. Nun sind die Glieder der Determinante, welche die Subdeterminante $p_{ih}$ enthalten, in dem Product $p_{ih}\, q_{ih}$ vereinigt (§. 2, 5). Also umfasst die Summe

$$p_{i1} q_{i1} + p_{i2} q_{i2} + \ldots + p_{i\mu} q_{i\mu}$$

alle Glieder der Determinante, jedes einfach. Demnach ist

$$p_{k1} q_{i1} + p_{k2} q_{i2} + \ldots + p_{k\mu} q_{i\mu}$$

die Determinante des Systems, welches aus dem gegebenen System dadurch abgeleitet wird, dass man die $i$te Zeilen-Combination durch die $k$te ersetzt. Die Zeilen dieses Systems sind nicht alle von einander verschieden, also ist die Determinante desselben identisch null.

Die Summe $p_{i1}\, q_{i1} + p_{i2}\, q_{i2} + \ldots$ hat $\mu m!\,(n-m)! = n!$ Glieder, weil

$$\mu = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

**Beispiel.** Durch Entwickelung nach den Subdeterminanten der beiden ersten Zeilen des Systems findet man

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= 12\,|\,34 + 23\,|\,14 + 31\,|\,24$$
$$+ 34\,|\,12 + 14\,|\,23 + 24\,|\,31$$

$$\text{wenn } 12\,|\,34 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

---

*) Cauchy l. c. p. 100. Der erste Theil dieses Satzes ist in einem allgemeinern Satz enthalten, welcher der Laplace'sche Determinantensatz genannt wird. S. unten (6).

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & . & . & . \\ \hline c_1 & c_2 & . & . & . \\ d_1 & d_2 & . & . & . \\ e_1 & e_2 & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & 12\,|\,345 + 23\,|\,145 + 34\,|\,125 + 45\,|\,123 \\ & + 13\,|\,425 + 24\,|\,315 + 35\,|\,142 \\ & + 14\,|\,235 + 25\,|\,134 \\ & + 15\,|\,243 \end{aligned}$$

$$\text{wenn} \quad 12\,|\,345 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

**2.** Wenn das System in $m$ Zeilen $n - m$ Colonnen Nullen hat, so ist seine Determinante das Product einer Subdeterminante $m$ten Grades mit ihrer Adjuncte. Wenn das System in $m$ Zeilen mehr als $n - m$ Colonnen Nullen hat, so ist seine Determinante 0 *).

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ \hline d & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_3 & d_4 \\ e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

Die übrigen Subdeterminanten der 3 ersten Zeilen sind null.

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} = 0$$

Alle Subdeterminanten der 3 ersten Zeilen sind null.

**Beispiel.**

$$\begin{vmatrix} a & c & c' & a' \\ b & d & d' & b' \\ b' & d' & d & b \\ a' & c' & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + a' & c + c' & c' & a' \\ b + b' & d + d' & d' & b' \\ b' + b & d' + d & d & b \\ a' + a & c' + c & c & a \end{vmatrix}$$

*) Jacobi Det. 5.

$$= \begin{vmatrix} a+a' & c+c' & c' & a' \\ b+b' & d+d' & d' & b' \\ 0 & 0 & d-d' & b-b' \\ 0 & 0 & c-c' & a-a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d-d' & b-b' \\ c-c' & a-a' \end{vmatrix}$$

**3.** Die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' & \gamma\gamma' \\ 1 & \delta & \delta' & \delta\delta' \end{vmatrix}$$

nach den Subdeterminanten der ersten beiden Colonnen entwickelt giebt

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\gamma'\delta' + \ldots + (\gamma-\delta)(\alpha-\beta)\alpha'\beta' + \ldots$$
$$= A(\alpha'\delta'+\beta'\gamma') + B(\beta'\delta'+\alpha'\gamma') + C(\gamma'\delta'+\alpha'\beta')$$

wenn man

$$(\beta-\gamma)(\alpha-\delta) = A, \quad (\gamma-\alpha)(\beta-\delta) = B, \quad (\alpha-\beta)(\gamma-\delta) = C$$

setzt, wobei $A + B + C = 0$ (§. 3, 9). Daher ist

$$R = A(\alpha'\delta'+\beta'\gamma'-\gamma'\delta'-\alpha'\beta') - B(\gamma'\delta'+\alpha'\beta'-\beta'\delta'-\alpha'\gamma')$$
$$= A(\gamma'-\alpha')(\beta'-\delta') - B(\beta'-\gamma')(\alpha'-\delta') = AB'-A'B$$
$$= \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} \text{*)}$$

weil auch $A'+B'+C'=0$. Insbesondere ist

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' & \gamma\gamma' \\ 1 & \alpha' & \alpha & \alpha\alpha' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta+\beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma+\gamma' & \gamma\gamma' \\ 1 & \alpha' & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta+\beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma+\gamma' & \gamma\gamma' \\ 0 & \alpha'-\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (\alpha'-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta+\beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma+\gamma' & \gamma\gamma' \end{vmatrix} = (\alpha'-\alpha)S$$

Die Determinante $S$ hat die Glieder

$$\beta\gamma'(\gamma-\beta') + \gamma\alpha'(\alpha-\gamma') + \alpha\beta(\beta'-\gamma+\gamma-\alpha')$$
$$+ \beta'\gamma(\gamma'-\beta) + \gamma'\alpha(\alpha'-\gamma) + \alpha'\beta'(\beta-\gamma'+\gamma'-\alpha)$$

welche wie folgt vereinigt werden

$$\alpha(\gamma-\alpha')(\beta-\gamma') + \alpha'(\gamma'-\alpha)(\beta'-\gamma) + \beta'(\gamma'-\beta)(\gamma-\alpha') + \beta(\gamma-\beta')(\gamma'-\alpha)$$

so dass

$$S = (\alpha-\beta')(\beta-\gamma')(\gamma-\alpha') + (\alpha'-\beta)(\beta'-\gamma)(\gamma'-\alpha)$$

---

*) Cayley Philos. Trans. 1858 t. 148 p. 436.

Durch die Gleichung $R = 0$ wird die Collinearität (Homographie) der entsprechenden Quadrupel $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ (Puncte einer Geraden, Gerade eines planen Büschels, Ebenen eines Büschels) ausgedrückt, während die Gleichung $S = 0$ die Involution der Paare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ bedeutet. Vergl. Chasles Géom. sup. 1852 $n^0$ 218.

4. Die Determinante $(m+n)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1m} & e_{11} & .. & e_{1n} \\ . & .. & . & . & .. & . \\ a_{m1} & .. & a_{mm} & e_{m1} & .. & e_{mn} \\ 0 & .. & 0 & b_{11} & .. & b_{n1} \\ . & .. & . & . & .. & . \\ 0 & .. & 0 & b_{1m} & .. & b_{nm} \\ a_{m+1,1} & .. & a_{m+1,m} & e_{m+1,1} & .. & e_{m+1,n} \\ . & .. & . & . & .. & . \\ a_{n1} & .. & a_{nm} & e_{n1} & .. & e_{nn} \end{vmatrix}$$

deren Elemente $e_{11} .. e_{nn}$ so bestimmt werden, dass $e_{ik}$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $i$ und $k$ gleich oder ungleich sind, wird nach den Subdeterminanten der $m$ ersten Colonnen entwickelt, indem man aus $m$ Zeilen derselben die Subdeterminante $m$ten Grades bildet

$$A = \Sigma \pm a_{f1}\, a_{g2} \,..$$

Um ihre Adjuncte $B$ zu finden, stelle man die die Elemente $a$ enthaltenden Zeilen $f, g, ..$ voran an den Anfang des Systems, und dann ebenso die die Elemente $b$ enthaltenden Colonnen $f, g, ..$ voran nächst der $m$ten Colonne. Hierbei hat die Determinante $R$ keinen Wechsel erlitten, und in jede Stelle des Systems, welche ein Element $e$ mit gleichen Nummern enthielt, ist wiederum ein solches Element eingetreten. Also ist die gesuchte Adjuncte $B$

$$\Sigma \pm b_{1f}\, b_{2g} .. e_{rr}\, e_{ss} .. \Sigma \pm b_{1f}\, b_{2g} .. \quad (\S.\ 3,\ 3)$$

Demnach ist (1) $R = \Sigma AB$ eine Summe, deren Glieder dadurch entstehn, dass man für $f, g, ..$ alle Combinationen von $m$ verschiedenen Nummern der Reihe $1, 2, .., n$ setzt.

5. Aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & .. & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ . & .. & . \\ b_{n1} & .. & b_{nn} \end{matrix}$$

werden 2mal $\mu$ Systeme abgeleitet, indem man im ersten System

alle Colonnen-Combinationen der Reihe nach durch eine bestimmte Colonnen-Combination $i$ des zweiten Systems, und im zweiten System eine bestimmte Colonnen-Combination $k$ der Reihe nach durch alle Colonnen-Combinationen des ersten Systems ersetzt. Die Determinanten der gegebenen Systeme werden durch $R$ und $S$ bezeichnet, die Subdeterminanten durch $p_{ik}$ und $p'_{ik}$, ihre Adjuncten durch $q_{ik}$ und $q'_{ik}$, die Determinanten der abgeleiteten Systeme durch $t_{i1}$, $t_{i2}$, .. und $u_{1k}$, $u_{2k}$, ... Dann ist

$$\begin{array}{ll} R = p_{1k}\, q_{1k} + p_{2k}\, q_{2k} + \ldots & S = p'_{1k}\, q'_{1k} + p'_{2k}\, q'_{2k} + \ldots \\ t_{i1} = p'_{1i}\, q_{11} + p'_{2i}\, q_{21} + \ldots & u_{1k} = p_{11}\, q'_{1k} + p_{12}\, q'_{2k} + \ldots \\ t_{i2} = p'_{1i}\, q_{12} + p'_{2i}\, q_{22} + \ldots & u_{2k} = p_{12}\, q'_{1k} + p_{22}\, q'_{2k} + \ldots \\ \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \end{array}$$

folglich (1)

$$\begin{array}{l} t_{i1}\, p_{11} + t_{i2}\, p_{12} + \ldots = p'_{1i}\, R \\ t_{i1}\, p_{21} + t_{i2}\, p_{22} + \ldots = p'_{2i}\, R \\ \ldots \quad \ldots \end{array}$$

und daher

$$t_{i1}(p_{11}\, q'_{1k} + p_{21}\, q'_{2k} + \ldots) + t_{i2}(p_{12}\, q'_{1k} + p_{22}\, q'_{2k} + \ldots)$$

$$\text{d. i. } t_{i1}\, u_{1k} + t_{i2}\, u_{2k} + \ldots = R(p'_{1i}\, q'_{1k} + p'_{2i}\, q'_{2k} + \ldots)$$

Durch Composition der Reihen $t_{i1}$, $t_{i2}$, .. und $u_{1k}$, $u_{2k}$, .. findet man also $RS$, wenn $k = i$, oder 0, wenn $k$ von $i$ verschieden *).

Z. B. aus den Systemen

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \end{array}$$

findet man, wenn die Determinanten $t$ und $u$ durch die Colonnen der Systeme bezeichnet werden,

$$5634.1278 + 5264.1378 + 5236.1478 + 1564.2378 + 1536.2478 + 1256.3478 = 1234.5678$$

$$1278.5634 + 1628.5734 + 1672.5834 + 5128.6734 + 5172.6834 + 5612.7834 = 5678.1234$$

$$1278.5612 + 1286.5712 + 1267.5812 = 0 \text{ u. s. w.}$$

6. Die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ kann auch durch eine Summe von Producten mehrerer Subdeterminanten dargestellt werden **).

---

*) Sylvester. Vergl. §. 3, 9.

**) Vandermonde l. c. p. 524. Laplace l. c. p. 294. Jacobi Det. 8.

Man wähle eine Combination von $\alpha$ Colonnen $fg\ldots$, aus den übrigen eine Combination von $\beta$ Colonnen $ik\ldots$, aus den übrigen eine Combination von $\gamma$ Colonnen $pq\ldots$, u. s. w., so dass

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = n$$

und bilde von diesen Combinationen die Subdeterminanten $\alpha$ten, $\beta$ten, $\gamma$ten, .. Grades

$$A = \Sigma \pm a_{1f}\, a_{2g} \ldots$$
$$B = \Sigma \pm a_{\alpha+1,i}\, a_{\alpha+2,k} \ldots$$
$$C = \Sigma \pm a_{\alpha+\beta+1,p}\, a_{\alpha+\beta+2,q} \ldots$$

u. s. w., dergestalt dass

$$a_{1f}\, a_{2g} \ldots a_{\alpha+1,i}\, a_{\alpha+2,k} \ldots a_{\alpha+\beta+1,p}\, a_{\alpha+\beta+2,q} \ldots$$

ein Glied der Determinante $R$ ist. Dann umfasst die Summe $\Sigma ABC\ldots$ von

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma} \ldots = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots}$$

Gliedern (welche entstehn, indem man alle Colonnen-Combinationen bildet), alle Glieder der Determinante $R$, jedes einfach.

## §. 5. Besondere Entwickelungen von Determinanten.

1. Die Determinante $n$ten Grades

$$F(z) = \begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & a_{22}+z & a_{23} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+z & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

ist eine Function $n$ten Grades der Variablen $z$, von welcher die diagonalen Elemente des Systems abhängen. Der Coefficient von $z^n$ ist 1, das constante Glied ist $F(0) = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$. Um den Coefficienten von $z^m$ zu finden, bilde man das Product der adjungirten Subdeterminanten $m$ten und $(n-m)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{ff}+z & a_{fg} & . \\ a_{gf} & a_{gg}+z & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{rr}+z & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss}+z & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

welches die Glieder von $F(z)$

$$z^m \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = z^m R_{n-m}$$

enthält. Der gesuchte Coefficient wird durch die Summe $\Sigma R_{n-m}$ ausgedrückt, deren Glieder allen Combinationen $(n-m)$ten Grades $rs$.. der Nummern 1..$n$ entsprechen. Daher ist*)

$$F(z) = R_n + z\Sigma R_{n-1} + z^2\Sigma R_{n-2} + \cdots + z^n$$

**Beispiel.** Wenn $n=4$, und $a_{11}$, $\Sigma \pm a_{11}a_{22}$, .. durch 1, 12, .. bezeichnet werden, so ist $F(z)$

$$= 1234 + [123 + 124 + 134 + 234]\,z$$
$$+ [12 + 13 + 14 + 23 + 24 + 34]\,z^2 + [1 + 2 + 3 + 4]\,z^3 + z^4$$

**2.** Die analoge Entwickelung von

$$U = \begin{vmatrix} a-u & b & c \\ a' & b'-u' & c' \\ a'' & b'' & c''-u'' \end{vmatrix}$$

ergiebt

$$\Delta - u\alpha - u'\beta' - u''\gamma'' + u'u''a + uu''b' + uu'c'' - uu'u''$$

wenn

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

und $\alpha$, $\beta'$, $\gamma''$ die Adjuncten der Elemente $a$, $b'$, $c''$ in $\Delta$ bedeuten. Unter den Voraussetzungen

a ?

$$u = u + b + c, \qquad u' = a' + b' + c', \qquad u'' = a'' + b'' + c''$$

verschwindet $U$ (§. 3, 7) und man hat

$$\Delta = uu'u'' - u'u''a - uu''b' - uu'c'' + u\alpha + u'\beta' + u''\gamma''$$
$$= uu'u'' - u'u''b - uu''c' - uu'a'' + u\beta + u'\gamma' + u''\alpha''$$
$$= uu'u'' - u'u''c - uu''a' - uu'b'' + u\gamma + u'\alpha' + u''\beta''$$

nach cyclischer Vertauschung der Colonnen, bei welcher $\Delta$ das Zeichen nicht wechselt (§. 1, 5). Daher ist

$$\frac{\Delta}{uu'u''} = 1 - \frac{a}{u} - \frac{b'}{u'} - \frac{c''}{u''} + \frac{\alpha}{u'u''} + \frac{\beta'}{uu''} + \frac{\gamma''}{uu'}$$

wovon die 3 letzten Glieder wiederum zerlegt werden können**).

**3.** Die Glieder der Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ enthalten von den Elementen der Diagonale entweder alle $n$, oder $n-2$, oder $n-3$, .., oder 1, oder keines. Um die Glieder von $R$ zu

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 15.
**) Vergl. Jacobi Crelle J. 5 p. 350.

finden, welche $m$ und nicht mehr diagonale Elemente enthalten, bilde man das Product der adjungirten Subdeterminanten $m$ten und $(n-m)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{ff} & a_{fg} & . \\ a_{gf} & a_{gg} & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

Der erste Factor hat das Glied $a_{ff}.a_{gg}..$, der andre Factor wird, nachdem man seine diagonalen Elemente durch Nullen ersetzt hat, durch $D_{n-m}$ bezeichnet. Daher werden die gesuchten Glieder durch die Summe

$$\Sigma\, a_{ff}\, a_{gg} \,..\, D_{n-m}$$

ausgedrückt, deren Glieder aus allen Combinationen $m$ten Grades $fg..$ und den zugehörigen Combinationen $(n-m)$ten Grades $rs..$ der Nummern $1..n$ gebildet sind*).

**Beispiel.** Wenn

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

durch (1234) bezeichnet wird, u. s. w., so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{14} \\ . & .. & . \\ a_{41} & .. & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} + a_{11}\, a_{22}\, (34) + a_{11}\, a_{33}\, (24) + a_{11}\, a_{44}\, (23) \\ + a_{22}\, a_{33}\, (14) + a_{22}\, a_{44}\, (13) + a_{33}\, a_{44}\, (12) \\ + a_{11}\, (234) + a_{22}\, (134) + a_{33}\, (124) + a_{44}\, (123) + (1234)$$

4. Die Anzahl derjenigen Glieder der Determinante

$$R = \Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{nn}$$

welche diagonale Elemente des Systems enthalten, wird wie folgt gefunden. Die Formel (3)

$$a_{ff}\, a_{gg} \,..\, \Sigma \pm a_{rr}\, a_{ss} \,..$$

hat $(n-m)!$ Glieder, welche Glieder von $R$ sind und $m$ und mehr diagonale Elemente enthalten. Man bilde nun aus allen Combinationen $m$ten Grades $fg..$ und den zugehörigen Combinationen $(n-m)$ten Grades $rs..$ die entsprechenden Formeln und durch Addition derselben die Summe $S_m$. Diese Summe hat

---

*) Cayley Crelle J. 38 p. 93.

$$(n-m)!\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!}$$

Glieder, welche Glieder von $R$ mit $m$ und mehr diagonalen Elementen, aber nicht alle von einander verschieden sind. Denn ein Glied einer der addirten Formeln, welches $k$ und nicht mehr diagonale Elemente enthält, kommt in $\binom{k}{m}$ Formeln einfach vor und hat in $S_m$ den Coefficienten $\binom{k}{m}$.

Ein gegebenes Determinantenglied mit $k$ und nicht mehr diagonalen Elementen hat in dem Aggregat von $k$ und mehr Summen $S_1-S_2+S_3-\cdots$ den Coefficienten

$$\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}-\cdots \text{ d. i. } 1, \text{ weil } 1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\cdots$$
$$=(1-1)^k=0.$$

Demnach enthält das Aggregat der $n$ Summen $S_1-S_2+S_3-\cdots$ kein Determinantenglied ohne diagonale Elemente, aber alle Determinantenglieder mit 1 und mehr diagonalen Elementen, jedes einfach.

Wenn man entsprechend die Gliederzahl von $S_1$ vermindert um die Gliederzahl von $S_2$, vermehrt um die Gliederzahl von $S_3$, u. s. w., so behält man die Anzahl der Determinantenglieder mit diagonalen Elementen

$$\frac{n!}{1}-\frac{n!}{2}+\frac{n!}{3!}-\cdots$$

und findet die Anzahl der Determinantenglieder ohne diagonale Elemente

$$\psi_n=n!\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right\}$$

Weil

$$e^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

so ist $\psi_n$ bei ungeradem $n$ die ganze Zahl des Quotienten $n!:e$, bei geradem $n$ die nächsthöhere ganze Zahl.

Zur recursiven Berechnung von $\psi_n$ hat man

$$\psi_{n+1}=(n+1)!\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right\}$$
$$=(n+1)\psi_n+(-1)^{n+1}$$

und durch Addition von $\psi_n=n\psi_{n-1}+(-1)^n$

$$\psi_{n+1} = n(\psi_{n-1} + \psi_n)$$

Aus $\psi_1=0$, $\psi_2=1$ findet man $\psi_3=2$, $\psi_4=9$, $\psi_5=44$, $\psi_6=265$, u. s. w.

Wenn man in der Entwickelung der Determinante $R$ nach den diagonalen Elementen (3) die einzelnen Glieder zählt, so erhält man direct die Recursion

$$\psi_n + \binom{n}{n-1}\psi_{n-1} + \cdots + \binom{n}{2}\psi_2 + 1 = n!$$

und kann $\psi_n$, nachdem man $n-1$, $n-2$, .. für $n$ gesetzt hat, aus dem aufgestellten linearen System berechnen *).

5. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und $\alpha_{ik}$ dem Element $a_{ik}$ adjungirt ist, so kann die Determinante $S = \Sigma \pm a_{00}\, a_{11} \ldots a_{nn}$ des um den Rand $a_{n0} \ldots a_{00} \ldots a_{0n}$ vergrösserten Systems nach den Elementen des Randes entwickelt werden **)

$$S = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdot \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdot \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = a_{00} R - \Sigma a_{i0}\, a_{0k}\, \alpha_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

Die Glieder von $S$, welche das Element $a_{00}$ enthalten, werden durch $a_{00} R$ ausgedrückt. Wenn die Subdeterminanten des vergrösserten Systems

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{0k} \\ a_{i0} & a_{ik} \end{vmatrix} \quad \text{und } Q = \begin{vmatrix} a_{fr} & a_{fs} & \cdot \\ a_{gr} & a_{gs} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

adjungirt sind, so ist $a_{00}a_{ik}Q$ Ausdruck der Glieder von $S$, welche die Elemente $a_{00}$, $a_{ik}$ enthalten, folglich $a_{ik}Q$ Ausdruck der Glieder von $R$, welche das Element $a_{ik}$ enthalten, d. h. $Q = \alpha_{ik}$, und $-a_{i0}\, a_{0k}\, \alpha_{ik}$ Ausdruck der Glieder von $S$, welche die Elemente des Randes $a_{i0}$, $a_{0k}$ enthalten. U. s. w.

---

*) Die Zahl $\psi_n$ ist in der 3. Auflage dieses Buchs 1870 direct und recursiv bestimmt worden. Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1873 p. 534. Eine andre Auszählung hat J. Weyrauch Crelle J. 74 p. 273 mitgetheilt. Der recursive Ausdruck für $\psi_{n+1}$ ist direct aufgestellt worden von Monro Messenger of Math. 1872 p. 38.

**) Cauchy l. c. p. 69.

**Beispiele.**
$$\begin{vmatrix} a & f & g & h \\ f' & b & 0 & 0 \\ g' & 0 & c & 0 \\ h' & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd - ff'cd - gg'bd - hh'bc$$

Unter den Adjuncten der Elemente des kleinern Systems sind nur die der diagonalen Elemente nicht null.

$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2+x_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3+x_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1+x_1)\, x_2x_3x_4 + a_2x_1x_3x_4 + a_3x_1x_2x_4 + a_4x_1x_2x_3$$
$$= x_1x_2x_3x_4\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \frac{a_4}{x_4}\right)$$

Die letzte Zeile des gegebenen Systems wird um die vorhergehenden Zeilen vermehrt, die vorletzte desgleichen, u. s. w. Im transformirten System wird die erste Zeile von den folgenden Zeilen subtrahirt. Wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x$, $a_1 + a_2 + \cdots = b$, so ist die Determinante $x^4\left(1 + \frac{b}{x}\right)$.

6. Wenn $a_{ki} = a_{ik}$, so ist $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ (§. 3, 5), folglich
$$S = a_{00} R - \Sigma a_{i0}^2 \alpha_{ii} - 2\, \Sigma a_{i0} a_{k0} \alpha_{ik}$$
so dass für $i$ die Nummern $1 \ldots n$, für $ik$ die Combinationen 2ten Grades derselben Nummern gesetzt werden.

**Beispiele.**

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh$$

In $\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix}$ haben $b$, $c$, $f$ die Adjuncten $c$, $b$, $-f$.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2 - 2abfg - 2acfh - 2bcgh$$
$$= (af + bg - ch)^2 - 4abfg$$



$$= -(\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch})(-\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch}) \cdot$$
$$\cdot (\sqrt{af} - \sqrt{bg} + \sqrt{ch})(\sqrt{af} + \sqrt{bg} - \sqrt{ch})$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix} = Rd - l^2a' - m^2b' - n^2c'$$
$$- 2mnf' - 2lng' - 2lmh'$$

wenn die Adjuncten der Elemente $a, h, \ldots$ in

$$R = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

durch $a', h', \ldots$ bezeichnet werden.

7. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} = 0$, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1k} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{ik} \end{vmatrix} = 0 \quad (\S\ 3,\ 8)$$

$$S = \Sigma \pm a_{00}\, a_{11} \ldots a_{nn} = -\Sigma a_{i0}\, a_{0k}\, \alpha_{ik} \quad (5)$$

und demnach unter der Voraussetzung, dass $\alpha_{11}$ nicht null ist,

$$\alpha_{11} S = -\Sigma a_{i0}\, \alpha_{i1}\, \Sigma a_{0k}\, \alpha_{1k}$$
$$= -(a_{10}\,\alpha_{11} + a_{20}\,\alpha_{12} + \cdots)(a_{01}\,\alpha_{11} + a_{02}\,\alpha_{12} + \cdots)$$
$$= -\begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & . \\ a_{20} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & . \\ a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} {}^{*)}$$

Die Factoren des durch $S$ theilbaren Products sind den Adjuncten der Elemente $a_{01}$ und $a_{10}$ in $S$ entgegengesetzt gleich, während $\alpha_{11}$ die Adjuncte der Subdeterminante $a_{00}\, a_{11} - a_{01}\, a_{10}$ ist. Vergl. §. 7, 2.

Wenn insbesondere $a_{ki} = a_{ik}$, mithin $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, so ist

$$\alpha_{11} S = -(\Sigma a_{i0}\, \alpha_{i1})^2 = -\begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & . \\ a_{20} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix}^2$$

---

*) Vergl. Hesse Crelle J. 69 p. 319.

Vermöge der Identität $\alpha_{ii}\,\alpha_{kk} = \alpha_{ik}^2$ (§. 3, 8) ist zugleich

$$S = -\Sigma a_{i0} \sqrt{\alpha_{ii}}\,\Sigma a_{0k} \sqrt{\alpha_{kk}} = -(\Sigma a_{i0} \sqrt{\alpha_{ii}})^2$$

wobei die Wurzeln eindeutig so bestimmt sind, dass das Product $\sqrt{\alpha_{ii}}\,\sqrt{\alpha_{kk}}$ den Werth $\alpha_{ik}$ hat (nicht $-\alpha_{ik}$).

Hieraus fliesst ein wichtiger Satz über die quadratischen Formen. Die quadratischen Formen

$$u = \Sigma a_{ik}\,x_i\,x_k \qquad v = \Sigma \alpha_{ik}\,y_i\,y_k \qquad \left| \begin{array}{c} i, k = 1, 2, \ldots \\ a_{ki} = a_{ik} \end{array} \right|$$

heissen adjungirte Formen, $R = \Sigma \pm a_{11}\,a_{22} \ldots$ heisst die Determinante der Form $u$ (§. 2, 5). Unter der Voraussetzung $R = 0$ ist

$$\alpha_{11}\,v = (\Sigma \alpha_{i1}\,y_i)^2 = \left| \begin{array}{cccc} y_1 & a_{12} & a_{13} & . \\ y_2 & a_{21} & a_{23} & . \\ y_3 & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & . \end{array} \right|^2$$

Wenn die Determinante einer quadratischen Form null ist, so ist die adjungirte Form das Quadrat einer linearen Form*).

8. I. Wenn $a_{ki} = -a_{ik}$, $a_{ii} = 0$, $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ geraden Grades, $R' = \Sigma \pm a_{22} \ldots a_{nn}$ ungeraden Grades, und wenn die Adjuncte von $a_{ik}$ in $R'$ durch $\alpha_{ik}$ bezeichnet wird, so ist (7)

$$R' = 0, \quad \alpha_{ki} = \alpha_{ik}, \quad \alpha_{ii}\,\alpha_{kk} = \alpha_{ik}^2$$
$$R = (\Sigma a_{1i} \sqrt{\alpha_{ii}})^2$$

mithin $\sqrt{R}$ eine lineare Form der Elemente einer Zeile oder einer Colonne. Bei $n = 4$ ist $\sqrt{\alpha_{ii}}$ rational, also $\sqrt{R}$ ein rationales Aggregat von 3 Gliedern; bei $n = 6$ ist $\sqrt{\alpha_{ii}}$ rational, also $\sqrt{R}$ ein rationales Aggregat von 3.5 Gliedern; u. s. w. Daher ist $\sqrt{R}$ ein rationales Aggregat von

$$1 . 3 . 5 \ldots (n-1) = \frac{n!}{2^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)!}$$

---

*) Diess ist von Salmon 1859 (Lessons n°. 154) auf anderem Wege gefunden worden. Vergl. Serret Algèbre t. 1 p. 556. Hesse l. c.

Gliedern. Jedes Glied von $\sqrt{R}$ ist ein Product von $\frac{1}{2}n$ Elementen, deren Nummern alle von einander verschieden sind. Insbesondere ist $a_{12}a_{34}\,..\,a_{n-1,n}$ ein Glied eines Werthes von $\sqrt{R}$, weil

$$(a_{12}a_{34}\,..\,a_{n-1,n})^2 = (-1)^{\frac{1}{2}n}\, a_{12}a_{34}\,..\,a_{n-1,n}\,a_{21}a_{43}\,..\,a_{n,n-1}$$

ein Glied von $R$ ist; denn aus den Colonnen-Nummern 2143 .. wird durch $\frac{1}{2}n$ Vertauschungen von Nachbarn die Reihe 1234 .. erhalten. Der Werth von $\sqrt{R}$, welcher das Glied $a_{12}a_{34}\,..\,a_{n-1,n}$ (nicht das entgegengesetzt gleiche) enthält, wird durch

$$J = (1, 2, .., n)$$

bezeichnet*).

II. Bei Vertauschung von zwei Nummern der Elemente wechselt $J$ das Zeichen. Wenn durch $a_{ik}B$ die Glieder von $J$ bezeichnet werden, welche das Element $a_{ik}$ enthalten, so ist $B$ aus solchen Elementen gebildet, deren Nummern von $i$ und $k$ verschieden sind. Bei Vertauschung von $i$ und $k$ geht $J$ über in $J'$, $a_{ik}B$ in $a_{ki}B$ d. i. $-a_{ik}B$, während $J^2$ d. i. $R$ zweimal das Zeichen wechselt (§. 2, 3), also unverändert bleibt. Zufolge der Identität $J^2 = J'^2$ sind aber $J$ und $J'$ nicht gleich sondern entgegengesetzt gleich, weil ihre Glieder $a_{ik}B$ und $-a_{ik}B$ entgegengesetzt gleich sind.

III. Unter der Voraussetzung

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (-1)^i (2, .., i-1, i+1, .., n)$$

oder nach $i-2$ cyclischen Vertauschungen

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (i+1, .., n, 2, .., i-1)$$

findet man $\sqrt{\alpha_{ii}}\,\sqrt{\alpha_{kk}} = \alpha_{ik}$, also zur recursiven Berechnung der Formel $J$

$$(1, 2, .., n) = a_{12}(3, .., n) + a_{13}(4, .., n, 2) + \cdots + a_{1n}(2, .., n-1)$$

---

*) Jacobi Crelle J. 2 p. 354, 29 p. 236. Cayley Crelle J. 32 p. 119, 38 p. 95, 50 p. 299. Die Formel $J$ ist von Jacobi zum Gebrauch beim Pfaff'schen Integrationsproblem construirt, von Cayley mit dem Namen Pfaffian belegt worden. Die Eigenschaften derselben sind von Jacobi ohne Beweis und ohne die von Cayley bemerkte Relation $J^2 = R$ mitgetheilt worden. Vergl. Scheibner Leipz. Berichte 1859 p. 151, Veltmann Schlömilch Zeitschrift 1871 t. 16 p. 516.

**Beweis.** Die Glieder des Products $\sqrt{\alpha_{ii}}\,\sqrt{\alpha_{kk}}$ sind den Gliedern von $\alpha_{ik}$ der Reihe nach entweder gleich oder entgegengesetzt gleich, weil $\alpha_{ii}\,\alpha_{kk} = \alpha_{ik}^2$. Das Product

$$(-1)^{i+k}(2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)(2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$

geht durch eine bestimmte Menge von Zeichenwechseln über in

$$(k, p, q, r, \ldots, u, v)(p, q, r, s, \ldots, v, i)$$

wenn durch $p, q, r, s, \ldots, u, v$ die von $1, i, k$ verschiedenen Nummern der Reihe $1$ bis $n$ bezeichnet werden. Durch dieselbe Menge von Zeichenwechseln geht

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdot\cdot & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{i-1,2} & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{i+1,2} & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

über in

$$\begin{vmatrix} a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} & \cdot & a_{ki} \\ a_{pp} & a_{pq} & a_{pr} & \cdot & a_{pi} \\ a_{qp} & a_{qq} & a_{qr} & \cdot & a_{qi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{vp} & a_{vq} & a_{vr} & \cdot & a_{vi} \end{vmatrix}$$

Das Glied jenes Products

$$a_{kp}\,a_{qr} \cdot\cdot\, a_{uv} \cdot a_{pq}\,a_{rs} \cdot\cdot\, a_{vi}$$

stimmt mit dem Glied der Determinante

$$a_{kp}\,a_{pq}\,a_{qr} \cdot\cdot\, a_{vi}$$

auch dem Zeichen nach.

**Beispiele.**

$$\Sigma \pm a_{11} \cdot\cdot\, a_{44} = (1, 2, 3, 4)^2$$

$$(1, 2, 3, 4) = a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23}$$

$$\Sigma \pm a_{11} \cdot\cdot\, a_{66} = (1, 2, \ldots, 6)^2$$

$$(1, 2, \ldots, 6) = a_{12}\,(3, 4, 5, 6) + a_{13}(4, 5, 6, 2) + \cdot\cdot + a_{16}(2, 3, 4, 5)$$

$$\begin{aligned} &= a_{12}\,a_{34}\,a_{56} + a_{12}\,a_{35}\,a_{64} + a_{12}\,a_{36}\,a_{45} \\ &+ a_{13}\,a_{45}\,a_{62} + a_{13}\,a_{46}\,a_{25} + a_{13}\,a_{42}\,a_{56} \\ &+ a_{14}\,a_{56}\,a_{23} + a_{14}\,a_{52}\,a_{36} + a_{14}\,a_{53}\,a_{62} \\ &+ a_{15}\,a_{62}\,a_{34} + a_{15}\,a_{63}\,a_{42} + a_{15}\,a_{64}\,a_{23} \\ &+ a_{16}\,a_{23}\,a_{45} + a_{16}\,a_{24}\,a_{53} + a_{16}\,a_{25}\,a_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad - be + cf)^2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2$$

**9.** Wenn die Elemente der Determinante $R$ so beschaffen sind, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad a_{11} = a_{22} = \cdot \cdot = a_{nn} = z$$

so ist zufolge der oben (3) gezeigten Entwickelung

$$R = z^n + z^{n-2} \Sigma D_2 + z^{n-4} \Sigma D_4 + \cdot \cdot \text{*)}$$

wobei

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & \cdot \\ a_{ki} & a_{kk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

eine Subdeterminante $m$ten Grades ist, deren Elemente den Bedingungen

$$a_{rs} = -a_{sr}, \qquad a_{rr} = 0$$

unterliegen, und $\Sigma D_m$ die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus $D_m$ entspringen, indem für $ik$ .. alle Combinationen $m$ten Grades der Nummern 1 bis $n$ gesetzt werden.

Bei ungeraden $m$ ist $D_m$ null, bei geraden $m$ ist $D_m = (i, k \, ..)^2$, also $\Sigma D_m$ die Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten.

**Beispiele.**

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = z^3 + z(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2)$$

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & z & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & z & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & z \end{vmatrix} = z^4 + z^2(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2) + (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2$$

*) Cayley l. c.

## §. 6. Determinante eines componirten Systems.

1. Wenn das Element $c_{ik}$ aus der $i$ten Zeile des Systems $a$ und der $k$ten Zeile des Systems $b$ componirt ist (§. 3, 1) d. h.

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \cdots + a_{in} b_{kn}$$

so wird die Determinante $m$ten Grades des componirten Systems $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{mm}$ durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt. Dieser Ausdruck bedeutet, wenn die componirten Systeme defectiv sind ($m < n$), die Summe der $\binom{n}{m}$ Producte, welche aus

$$\begin{vmatrix} a_{1t} & a_{1u} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mt} & a_{mu} & \ldots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1t} & b_{1u} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{mt} & b_{mu} & \ldots \end{vmatrix}$$

dadurch entspringen, dass man für $tu$ .. alle Combinationen $m$ten Grades der Colonnen-Nummern 1 bis $n$ setzt; der gegebene Ausdruck bedeutet, wenn $m = n$, das Product der beiden Determinanten; der gegebene Ausdruck ist null, wenn die componirten Systeme excessiv sind ($m > n$) *).

**Beweis.** Ein Glied der Determinante des componirten Systems ist

$$c_{11} c_{22} \ldots = \Sigma a_{1t} b_{1t} \, \Sigma a_{2u} b_{2u} \ldots = \Sigma (a_{1t} a_{2u} \ldots b_{1t} b_{2u} \ldots \ldots)$$

eine Summe, deren Glieder entstehn, indem $t, u,$ .. die Reihe 1 bis $n$ durchlaufen. Alle Glieder der gesuchten Determinante $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{mm}$ enstehn, indem bei unveränderten ersten Nummern der $c$ alle Permutationen der zweiten Nummern eintreten. Dabei findet man für jede Complexion $tu$ .. alle Glieder der Deter-

---

*) Binet und Cauchy (in den gleichzeitigen Abhandlungen J. de l'éc. polyt. Cah. 16 p. 286 und Cah. 17 p. 81, 107) haben diesen Satz 1812 gefunden durch Betrachtung der besondern Fälle, welche Lagrange (Mém. de l'acad. de Berlin 1773 p. 285) und Gauss (Disquis. arithm. 157. 159. 268, I) gegeben hatten. Vergl. Jacobi Det. 13 und 14, wo der Schlusssatz zuerst ausgesprochen ist. Den anschaulichen Ausdruck hat die Determinante des componirten Systems in der 3ten Auflage dieses Buchs 1870 erhalten.

minante $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u}$ .. mit dem gemeinschaftlichen Factor $a_{1t} a_{2u}$ .., so dass

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots = \Sigma(a_{1t} a_{2u} \ldots \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} \ldots)$$

Wenn $t, u, \ldots$ nicht alle verschieden sind, so ist $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} \ldots = 0$. Daher braucht man, um alle Glieder der Summe zu erhalten, für $tu$ .. nur je $m$ verschiedene Nummern der Reihe 1 bis $n$ zu setzen. Wenn man aber für eine bestimmte Combination $tu$ .. deren Permutationen setzt, so hat $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u}$ .. entweder den Werth $Q$ oder den Werth $-Q$, und man erhält alle Glieder der Determinante $\Sigma \pm a_{1t} a_{2u}$ .. mit dem gemeinschaftlichen Factor $Q$. Folglich ist

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots = \Sigma(\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} \ldots \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} \ldots)$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für $tu$ .. alle Combinationen $m$ten Grades der Reihe 1 bis $n$ setzt.

Wenn $m < n$, so hat die Summe $\binom{n}{m}$ Glieder. Wenn $m = n$, so bleibt 1 Glied der Summe übrig; wenn $m > n$, so bleibt kein Glied der Summe übrig, weil $m$ verschiedene Nummern aus der Reihe 1 bis $n$ nicht genommen werden können.

**Beispiele.** Das System

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 \end{matrix}$$

ist componirt aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{matrix}$$

Seine Determinante ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} = ab \mid fg + ac \mid fh + bc \mid gh$$

$$\text{wenn } ab \mid fg = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Das System

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 & a_1 f_3 + b_1 g_3 + c_1 h_3 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 & a_2 f_3 + b_2 g_3 + c_2 h_3 \\ a_3 f_1 + b_3 g_1 + c_3 h_1 & a_3 f_2 + b_3 g_3 + c_3 h_2 & a_3 f_3 + b_3 g_3 + c_3 h_3 \end{matrix}$$

ist componirt aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{matrix}$$

Seine Determinante ist das Product

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

Das System

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & a_1 f_4 + b_1 g_4 + c_1 h_4 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_4 f_1 + b_4 g_1 + c_4 h_1 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & a_4 f_4 + b_4 g_4 + c_4 h_4 \end{matrix}$$

ist componirt aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{matrix}$$

Seine Determinante ist null und nicht verschieden von

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_4 & g_4 & h_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn $p, q, r, s$ lineare Functionen von $x, y, z$ sind und den Werthen $x_i, y_i, z_i$ die Werthe der Functionen $p_i, q_i, \ldots$ entsprechen, so ist

$$\begin{vmatrix} p_1 x_1 + q_1 y_1 + r_1 z_1 + s_1 & p_1 x_2 + q_1 y_2 + r_1 z_2 + s_1 \\ p_2 x_1 + q_2 y_1 + r_2 z_1 + s_2 & p_2 x_2 + q_2 y_2 + r_2 z_2 + s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 - p_1 & q_2 - q_1 & r_2 - r_1 & s_2 - s_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

eine quadratische Form der $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

2. Wenn das zweite System dem ersten gleich ist, so ist das componirte System symmetrisch d. h.

$$c_{ik} = a_{i1} a_{k1} + \ldots + a_{in} a_{kn} = c_{ki}$$

und die Determinante des componirten Systems

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \Sigma(\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} \ldots)^2$$

die Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten. Bei realen Elementen $a$ ist die Determinante $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots$ positiv, und wird nur dann null, wenn die Determinante $\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} \ldots$ bei allen Combinationen $tu \ldots$

null ist*). Die besondern Fälle

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & xx_1 + yy_1 + zz_1 \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & xx_1 + yy_1 + zz_1 & xx_2 + yy_2 + zz_2 \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ xx_2 + yy_2 + zz_2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

sind bereits von LAGRANGE (pyr. 3 u. 1) gefunden worden.

3. **Das Product von zwei Determinanten $n$ten Grades $P$ und $Q$** ist eine Determinante $R$ desselben Grades, die man bei gegebener Anordnung der beiden Systeme auf 4 im Allgemeinen verschiedene Arten darstellen kann**), indem man ihre Elemente componirt entweder aus je einer Zeile von $P$ und einer Zeile von $Q$, oder aus je einer Zeile von $P$ und einer Colonne von $Q$, oder aus je einer Colonne von $P$ und einer Zeile von $Q$, oder aus je einer Colonne von $P$ und einer Colonne von $Q$. Wenn nämlich

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & . . & a_{1n} \\ . & . . . & . \\ a_{n1} & . . & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} b_{11} & . . . & b_{1n} \\ . & . . . & . \\ b_{n1} & . . & b_{nn} \end{vmatrix}$$

so ist (1)

$$R = \begin{vmatrix} c_{11} & . . & c_{1n} \\ . & . . . & . \\ c_{n1} & . . & c_{nn} \end{vmatrix} = PQ$$

unter der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + . . + a_{in} b_{kn}$$

Folglich ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . . & a_{1n} \\ . & . . . & . \\ a_{n1} & . . & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & . . & b_{1n} \\ . & . . . & . \\ b_{n1} & . . & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1k} b_{1k} & . . & \Sigma a_{1k} b_{nk} \\ . & . . & . \\ \Sigma a_{nk} b_{1k} & . . & \Sigma a_{nk} b_{nk} \end{vmatrix}$$

wenn die einzelnen Summen dadurch gebildet werden, dass man für $k$ alle Nummern von 1 bis $n$ setzt. Nach derselben Bildungsregel ist

---

*) JACOBI l. c.
**) CAUCHY l. c. p. 83.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot\,\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1k}\, b_{k1} & \cdot\,\cdot & \Sigma a_{1k}\, b_{kn} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \Sigma a_{nk}\, b_{k1} & \cdot\,\cdot & \Sigma a_{nk}\, b_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\,\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{k1}\, b_{1k} & \cdot\,\cdot & \Sigma a_{k1}\, b_{nk} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \Sigma a_{kn}\, b_{1k} & \cdot\,\cdot & \Sigma a_{kn}\, b_{nk} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot\,\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{k1}\, b_{k1} & \cdot\,\cdot & \Sigma a_{k1}\, b_{kn} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \Sigma a_{kn}\, b_{k1} & \cdot\,\cdot & \Sigma a_{kn}\, b_{kn} \end{vmatrix}$$

Die links stehenden Determinanten, deren Product gebildet wurde, sind von $P$ und $Q$ nicht verschieden (§. 2, 3). Also sind die rechts stehenden Determinanten von $R$ nicht verschieden, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \\ a_{n1} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \\ b_{n1} & \cdot\,\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\,\cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \\ c_{n1} & \cdot\,\cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn $c_{ik}$ eine der Summen

$$\begin{array}{c} a_{i1}\, b_{k1} + \ldots + a_{in}\, b_{kn} \\ a_{i1}\, b_{1k} + \ldots + a_{in}\, b_{nk} \\ a_{1i}\, b_{k1} + \ldots + a_{ni}\, b_{kn} \\ a_{1i}\, b_{1k} + \ldots + a_{ni}\, b_{nk} \end{array}$$

bedeutet.

**Beispiele.** Nach der ersten Regel hat man

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ -d' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd & -ad' + bc' \\ -b'c + a'd & b'd' + a'c' \end{vmatrix}$$

Wenn $a, b, \ldots$ complexe Zahlen, $a', b', \ldots$ die conjugirten Zahlen sind, so ist $aa'$ die Norm von $a$, eine Summe von 2 Quadraten, welche durch N$a$ bezeichnet wird, u. s. w., folglich

$$(\mathrm{N}a + \mathrm{N}b)(\mathrm{N}c + \mathrm{N}d) = \mathrm{N}(ac + bd) + \mathrm{N}(ad' - bc')$$

Diese Identität enthält den Euler'schen Satz (Acta Petrop. 1777. I, 2 p. 48. Vergl. Nov. Comm. Petrop. 5 p. 53 und Lagrange Mém. de Berlin 1770 p. 123), nach welchem das Product zweier Summen von 4 Quadraten als Summe von 4 Quadraten auf 4 Arten dargestellt werden kann *).

Das Product einer Determinante mit einer Determinante nie-

*) Hermite Crelle J. 40 p. 297. Vergl. Gauss Werke 3 p. 384.

dern Grades wird ebenso gebildet, nachdem man die Determinante niedern Grades als Determinante höhern Grades dargestellt hat (§. 3, 3).

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_0 & q_0 & 0 & 0 \\ p_1 & q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 p_0 + b_0 q_0 & a_0 p_1 + b_0 q_1 & c_0 & d_0 \\ a_1 p_0 + b_1 q_0 & a_1 p_1 + b_1 q_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 p_0 + b_2 q_0 & a_2 p_1 + b_2 q_1 & c_2 & d_2 \\ a_3 p_0 + b_3 q_0 & a_3 p_1 + b_3 q_1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

4. Wenn die quadratische Form der $x$

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad \left| \begin{matrix} i, k = 1, 2, .., n \\ a_{ki} = a_{ik} \end{matrix} \right|$$

durch die lineare Substitution

$$x_1 = b_{11} y_1 + .. + b_{1n} y_n$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \qquad \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$x_n = b_{n1} y_1 + .. + b_{nn} y_n$$

in die quadratische Form der $y$

$$\Sigma c_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta \qquad \left| \begin{matrix} \alpha, \beta = 1, 2, .., n \\ c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta} \end{matrix} \right|$$

transformirt wird, so ist die Determinante der transformirten Form das Product der Determinante der gegebenen Form mit dem Quadrat der Determinante der Substitution *)

$$\Sigma \pm c_{11} .. c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn} (\Sigma \pm b_{11} .. b_{nn})^2$$

**Beweis.** Durch die angegebene Substitution geht $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ über in $\Sigma a_{ik} b_{i\alpha} b_{k\beta} y_\alpha y_\beta$, so dass

$$c_{\alpha\beta} = \Sigma a_{ik} b_{i\alpha} b_{k\beta} = \Sigma a_{ki} b_{k\alpha} b_{i\beta} = c_{\beta\alpha} = b_{1\alpha} d_{\beta 1} + .. + b_{n\alpha} d_{\beta n}$$

unter der Voraussetzung

$$d_{\beta\gamma} = b_{1\beta} a_{\gamma 1} + .. + b_{n\beta} a_{\gamma n}$$

Daher ist (1)

---

*) Diese Bemerkung ist für $n = 2$ von Lagrange Rech. d. Arithm. 22 (Mém. de Berlin 1773 p. 285) gemacht worden, für $n = 3$ von Gauss Disq. arithm. 286. Vergl. unten §. 14, 3.

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{11} & \cdot\cdot & d_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ d_{n1} & \cdot\cdot & d_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & \cdot\cdot & d_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ d_{n1} & \cdot\cdot & d_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

also durch Multiplication $\Sigma \pm c_{11} \ldots = (\Sigma \pm b_{11} \ldots)^2 \Sigma \pm a_{11} \ldots$

**5.** Wenn

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot\cdot & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot\cdot & c_{mm} \end{vmatrix}$$

so ist

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b_{11} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & b_{m1} & \cdot\cdot & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_{11} & \cdot\cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & c_{m1} & \cdot\cdot & c_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & \cdot \\ 1 & 1+c_{11} & 1+c_{12} & \cdot \\ 1 & 1+c_{21} & 1+c_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdot \\ 1 & c_{11} & c_{12} & \cdot \\ 1 & c_{21} & c_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

$$= P - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & c_{11} & c_{12} & \cdot \\ 1 & c_{21} & c_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

daher $Q - P$ d. i.

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1 & a_{1t} & a_{1u} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{mt} & a_{mu} & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b_{1t} & b_{1u} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & b_{mt} & b_{mu} & \cdot \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & c_{11} & c_{12} & \cdot \\ 1 & c_{21} & c_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

wenn für $tu$ .. alle Combinationen $(m-1)$ten Grades der Colonnen-Nummern 1 bis $n$ gesetzt werden*).

**6.** Wenn $v$, $w$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ Functionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$ sind, so dass

$$dv = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \qquad dw = w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3 -$$

---

*) S. des Verf. Aufsatz Leipz. Berichte 1873 p. 532, GUNDELFINGER Schlömilch Zeitschrift 18 p. 312.

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad \xi_2 = \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} \qquad \xi_3 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

so ist (1)

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \xi_3 \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + \xi_1 \begin{vmatrix} dx_2 & dx_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \xi_2 \begin{vmatrix} dx_3 & dx_1 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_1 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 & w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 d_3 x_3 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 & w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \end{vmatrix}$$

Unter der Voraussetzung, dass $v$, $w$ homogene Functionen von $\alpha$, $\beta$ Dimensionen sind, hat man $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = \alpha v$, u. s. w., folglich *)

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dv & dw \\ \alpha v & \beta w \end{vmatrix}$$

7. Ein System von $n^2$ Elementen $c$, dessen Subdeterminanten $(m+1)$ten und höhern Grades alle null sind, kann aus je $m$ Colonnen gegebener Systeme von $n^2$ Elementen $a$ und $b$ componirt werden. Unter der Voraussetzung $c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + \,..\, + a_{im}\, b_{km}$ ist jede Determinante $(m+1)$ten und höhern Grades des componirten Systems null (1).

Wenn die Subdeterminante $m$ten Grades $d = \Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{mm}$ nicht null ist, so können die Elemente $b$ so bestimmt werden, dass das gesuchte System $c$ in den $m$ ersten Zeilen und Colonnen mit dem gegebenen System $a$ übereinstimmt. Man bilde**)

$$d_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1m} & a_{1k} \\ . & .. & . & . \\ a_{m1} & .. & a_{mm} & a_{mk} \\ a_{i1} & .. & a_{im} & a_{ik} \end{vmatrix} = a_{i1}\, b_{k1} + \,..\, + a_{im}\, b_{km} + a_{ik}\, d$$

$$c_{ik} = a_{ik} - \frac{d_{ik}}{d} = -\frac{1}{d}(a_{i1}\, b_{k1} + \,..\, + a_{im}\, b_{km})$$

so sind sowohl $d_{1k}, \,..,\, d_{mk}$, als auch $d_{i1}, \,..,\, d_{im}$ null (§. 2, 3), u. s. w. Wenn auch die übrigen $(n-m)^2$ Determinanten $d_{ik}$ bei $i, k = m+1, \,..,\, n$ null sind, so stimmt das gesuchte System $c$ ganz mit dem System $a$ überein.

---

*) Aronhold 1862 Crelle J. 61 p. 100.

**) Kronecker 1864 Crelle J. 72 p. 152.

Von den Adjuncten $b$ haben

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1m} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot\,\cdot & b_{mm} \end{matrix}$$

die Eigenschaft, dass die nicht-diagonalen null sind als Determinanten von Systemen mit zwei gleichen Colonnen, während die diagonalen den Werth $-d$ haben, weil $d_{i1} = a_{i1} b_{11} + a_{i1} d = 0$, u. s. w.

**8.** **Der Satz über die Determinante eines componirten Systems kann auf den Laplace'schen Determinantensatz zurückgeführt** werden wie folgt*).

Man verwandle die Determinante $\Sigma \pm c_{11} \,..\, c_{mm}$ in die Determinante $(m+n)$ten Grades (§. 3, 3)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\,\cdot & c_{m1} & b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ c_{1m} & \cdot\,\cdot & c_{mm} & b_{m1} & \cdot\,\cdot & b_{mn} \\ 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 1 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 1 \end{vmatrix}$$

Indem man nun von der $i$ten Colonne die letzten $n$ der Reihe nach mit $a_{i1}$, $a_{i2}$, .. multiplicirten Colonnen subtrahirt, und auf diese Weise die ersten $m$ Colonnen transformirt, erhält man zufolge der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \,..\, + a_{in} b_{kn}$$

für $\Sigma \pm c_{11} \,..\, c_{mm}$ den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdot\,\cdot & 0 & b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\,\cdot & 0 & b_{m1} & \cdot\,\cdot & b_{mn} \\ -a_{11} & \cdot\,\cdot & -a_{m1} & 1 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ -a_{1n} & \cdot\,\cdot & -a_{mn} & 0 & \cdot\,\cdot & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man endlich jede der ersten $m$ Colonnen mit $-1$, und rückt die zweiten $m$ Zeilen des Systems an den Anfang, so erhält man (nach $m+m^2$ Zeichenwechseln)

*) Gordan nach briefl. Mittheilung von Clebsch 1868 Nov.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{m1} & 1 & .. & 0 & 0 & .. & 0 \\ . & .. & . & . & .. & . & . & .. & . \\ a_{1m} & .. & a_{mm} & 0 & .. & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & b_{11} & .. & b_{1m} & b_{1,m+1} & .. & b_{1n} \\ . & .. & . & . & .. & . & . & .. & . \\ 0 & .. & 0 & b_{m1} & .. & b_{mm} & b_{m,m+1} & .. & b_{mn} \\ a_{1,m+1} & .. & a_{m,m+1} & 0 & .. & 0 & 1 & .. & 0 \\ . & .. & . & . & .. & . & . & .. & . \\ a_{1n} & .. & a_{mn} & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 1 \end{vmatrix}$$

Die Entwickelung dieser Determinante nach den Subdeterminanten der $m$ ersten Colonnen (§, 4, 4) stimmt mit der oben (1) angegebenen Entwickelung der Determinante $\Sigma \pm c_{11} .. c_{mm}$ überein.

9. Wenn $x_1, .., x_n$ homogene lineare Functionen der Variablen $x_1', .., x_n'$ sind, wenn diese Variablen eben solche Functionen der Variablen $x_1'', .., x_n''$ sind, u. s. w., und zwar

$$(1) \begin{cases} x_1 = a_{11} x_1' + .. + a_{1n} x_n' \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = a_{n1} x_1' + .. + a_{nn} x_n' \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1' = a_{11}' x_1'' + .. + a_{1n}' x_n'' \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n' = a_{n1}' x_1'' + .. + a_{nn}' x_n'' \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1'' = a_{n1}' x_1''' + .. a_{1n}'' x_n''' \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n'' = a_{n1}'' x_1''' + .. + a_{nn}'' x_n''' \end{cases}$$

u. s. w., so erhält man durch successive Substitutionen*)

$$(I) \begin{cases} x_1 = (a, a')_{11} x_1'' + .. + (a, a')_{1n} x_n'' \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = (a, a')_{n1} x_1'' + .. + (a, a')_{nn} x_n'' \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} x_1 = (a, a', a'')_{11} x_1''' + .. + (a, a', a'')_{1n} x_n''' \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = (a, a', a'')_{n1} x_1''' + .. + (a, a', a'')_{nn} x_n''' \end{cases}$$

u. s. w. Der $\beta$te Coefficient der $\alpha$ten Zeile des Systems (I)

$$(a, a')_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a'_{\gamma\beta} = a_{\alpha 1} a'_{1\beta} + .. + a_{\alpha n} a'_{n\beta}$$

---

*) Mittheilung von Weierstrass bei Gelegenheit der Abhandlung über bilineare und quadratische Formen, Berliner Monatsbericht 1868 Mai 18.

ist aus der $\alpha$ten Zeile des Systems (1) und der $\beta$ten Colonne des Systems (2) componirt. Ebenso ist der Coefficient $(a, a', a'')_{\alpha\beta}$ aus der $\alpha$ten Zeile des Systems (I) und der $\beta$ten Colonne des Systems (3) componirt, folglich

$$(a, a', a'')_{\alpha\beta} = \sum_{\delta} (a, a')_{\alpha\delta}\, a''_{\delta\beta} = \sum_{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma}\, a'_{\gamma\delta}\, a''_{\delta\beta}$$

u. s. w. Man bezeichne ferner durch $A$, $A'$, $A''$, .. die Determinanten $n$ten Grades der zusammenzusetzenden Systeme, deren Elemente $a_{\alpha\beta}$, $a'_{\alpha\beta}$, $a''_{\alpha\beta}$, .. sind; durch $(A, A')$, $(A, A', A'')$, .. die Determinanten der componirten Systeme, deren Elemente $(a, a')_{\alpha\beta}$, $(a, a', a'')_{\alpha\beta}$, .. sind; durch

$$A_{\alpha\beta},\ A'_{\alpha\beta},\ \ldots,\ (A, A')_{\alpha\beta},\ (A, A', A'')_{\alpha\beta},\ \ldots$$

die Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades, mit welchen in den Determinanten $A$, $A'$, .., $(A, A')$, $(A, A', A'')$, .. die Elemente

$$a_{\alpha\beta},\ a'_{\alpha\beta},\ \ldots,\ (a, a')_{\alpha\beta},\ (a, a', a'')_{\alpha\beta},\ \ldots$$

multiplicirt sind; durch

$$A_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'},\ A'_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'},\ (A, A')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'},\ (A, A', A'')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'},\ \ldots$$

die Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades, mit welchen in den Determinanten $A$, $A'$, .., $(A, A')$, $(A, A', A'')$, .. die Subdeterminanten 2ten Grades

$$\Sigma \pm a_{\alpha\beta}\, a_{\alpha'\beta'},\ \Sigma \pm a'_{\alpha\beta}\, a'_{\alpha'\beta'},\ \Sigma \pm (a, a')_{\alpha\beta}\, (a, a')_{\alpha'\beta'},$$
$$\Sigma \pm (a, a', a'')_{\alpha\beta}\, (a, a', a'')_{\alpha'\beta'},\ \ldots$$

multiplicirt sind, u. s. w. Dann ist nach (1)

$$(A, A') = AA'$$
$$(A, A')_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}\, A'_{\gamma\beta}$$
$$(A, A')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'} = \sum_{\gamma\gamma'} A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'}\, A'_{\gamma\beta\ \gamma'\beta'}$$
$$(A, A')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'\ \alpha''\beta''} = \sum_{\gamma\gamma'\gamma''} A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'\ \alpha''\gamma''}\, A'_{\gamma\beta\ \gamma'\beta'\ \gamma''\beta''}$$

u. s. w. Die Glieder dieser Summen werden dadurch gebildet, dass man für $\gamma$, $\gamma\gamma'$, $\gamma\gamma'\gamma''$, .. alle Combinationen von je 1, 2, 3, .. verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis $n$ setzt. Denn es ist z. B.

$$(A, A')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'\ \alpha''\beta''}$$

eine Subdeterminante $(n-3)$ten Grades der Elemente $(a, a')$; die ersten Nummern dieser Elemente bleiben von der Reihe 1 bis $n$ übrig nach Ausschliessung von $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, und stimmen mit den ersten Nummern der Elemente in $A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'\ \alpha''\gamma''}$ überein; die zweiten

Nummern jener Elemente bleiben von der Reihe 1 bis $n$ übrig nach Ausschliessung von $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, und stimmen mit den zweiten Nummern der Elemente in $A'_{\gamma\beta\,\gamma'\beta'\,\gamma''\beta''}$ überein; dagegen sind die zweiten Nummern der Elemente in $A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'\,\alpha''\gamma''}$ sowie die ersten Nummern in $A'_{\gamma\beta\,\gamma'\beta'\,\gamma''\beta''}$ alle Combinationen von je $n-3$ verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis $n$.

Ebenso ist

$$(A, A', A'') = (A, A')A'' = A\,A'\,A''$$

$$(A, A', A'')_{\alpha\beta} = \sum_{\delta}(A, A')_{\alpha\delta}\,A''_{\delta\beta} = \sum_{\gamma\delta} A_{\alpha\gamma}\,A'_{\gamma\delta}\,A''_{\delta\beta}$$

$$(A, A', A'')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'} = \sum_{\delta\delta'}(A, A')_{\alpha\delta\,\alpha'\delta'}\,A''_{\delta\beta\,\delta'\beta'}$$

$$= \sum_{\gamma\gamma'\delta\delta'} A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'}\,A'_{\gamma\delta\,\gamma'\delta'}\,A''_{\delta\beta\,\delta'\beta'}$$

$$(A, A', A'')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'\,\alpha''\beta''} = \sum_{\delta\delta'\delta''}(A, A')_{\alpha\delta\,\alpha'\delta'\,\alpha''\delta''}\,A''_{\delta\beta\,\delta'\beta'\,\delta''\beta''}$$

$$= \sum_{\gamma\gamma'\gamma''\,\delta\delta'\delta''} A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'\,\alpha''\gamma''}\,A'_{\gamma\delta\,\gamma'\delta'\,\gamma''\delta''}\,A''_{\delta\beta\,\delta'\beta'\,\delta''\beta''}$$

u. s. w. Die Glieder dieser Summen werden dadurch gebildet, dass man sowohl für $\gamma$, $\gamma\gamma'$, $\gamma\gamma'\gamma''$, .. als auch für $\delta$, $\delta\delta'$, $\delta\delta'\delta''$, .. alle Combinationen von je 1, 2, 3, .. verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis $n$ setzt.

Ueberhaupt ist jede Subdeterminante des Systems der componirten Elemente $(a, a', .., a^{(\lambda)})$ darstellbar als Summe von Producten aus $(\lambda+1)$ Factoren, welche Subdeterminanten derselben Ordnung der Systeme der einfachen Elemente $a$, $a'$, .., $a^{(\lambda)}$ sind.

## §. 7. Determinanten eines Systems von Subdeterminanten.

1. Die Determinante des Systems der Adjuncten der $n^2$ Elemente eines gegebenen Systems ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante des Systems der Elemente*).

**Beweis.** Nach der Multiplicationsregel (§. 6, 3) ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & ... & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & .. & \alpha_{1n} \\ . & ... & . \\ \alpha_{n1} & .. & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & .. & c_{1n} \\ . & ... & . \\ c_{n1} & .. & c_{nn} \end{vmatrix}$$

*) Cauchy l. c. p. 82. Für $n = 3$ findet man diesen und den folgenden Satz bei Lagrange sur les pyr. 5 und bei Gauss Disqu. arithm. 267.

Das componirte Element

$$c_{ik} = a_{i1}\alpha_{k1} + \dots + a_{in}\alpha_{kn}$$

hat den Werth $R$ oder 0, je nachdem $k$ und $i$ gleich oder verschieden sind (§. 3, 2). Also reducirt sich die Determinante des componirten Systems auf das Anfangsglied $c_{11}c_{22}\dots c_{nn} = R^n$ (§. 3, 3). Daher ist

$$R\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = R^n$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}$$

**2.** Eine Subdeterminante $h$ten Grades des Systems $\alpha$ (der Adjuncten) hat zu der Adjuncte der entsprechenden Subdeterminante des Systems $a$ (der Elemente) das Verhältniss $R^{h-1}$. Subdeterminanten desselben Grades des Systems $\alpha$ verhalten sich zu einander, wie die Adjuncten der entsprechenden Subdeterminanten des Systems $a$*).

**Beweis.** Wenn die Subdeterminante $h$ten Grades $\Sigma \pm a_{fi}a_{gk}\dots$ des Systems $a$ die Adjuncte $\Sigma \pm a_{ru}\,a_{sv}\dots$ hat, so dass

$$\Sigma \pm a_{fi}\,a_{gk}\dots a_{ru}\,a_{sv}\dots = \Sigma \pm a_{11}\dots a_{nn} = R$$

so wird die entsprechende Subdeterminante $h$ten Grades

$$\Sigma \pm \alpha_{fi}\,\alpha_{gk}\dots$$

des Systems $\alpha$ als Determinante $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \dots & \alpha_{fu} & \alpha_{fv} & \dots \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \dots & \alpha_{gu} & \alpha_{gv} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}$$

dargestellt (§. 3, 3). Durch Composition der Zeilen der Systeme

---

*) Jacobi Det. 11 hatte diesen Satz durch algebraische Betrachtungen gefunden. Der directe Beweis ist von Borchardt angegeben worden. Briefl. Mittheilung 1853 Juli.

$$\begin{array}{cccccc} a_{fi} & a_{fk} & .. & a_{fu} & a_{fv} & .. \\ a_{gi} & a_{gk} & .. & a_{gu} & a_{gv} & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \\ a_{ri} & a_{rk} & .. & a_{ru} & a_{rv} & .. \\ a_{si} & a_{sk} & .. & a_{su} & a_{sv} & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & .. & \alpha_{fu} & \alpha_{fv} & .. \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & .. & \alpha_{gu} & \alpha_{gv} & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \end{array}$$

findet man das System

$$\begin{array}{cccccc} R & 0 & .. & a_{fu} & a_{fv} & .. \\ 0 & R & .. & a_{gu} & a_{gv} & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{ru} & a_{rv} & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{su} & a_{sv} & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \end{array}$$

mit der Determinante (§. 4, 2)

$$\begin{vmatrix} R & 0 & . \\ 0 & R & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} & . \\ a_{su} & a_{sv} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = R^h \Sigma \pm a_{ru} a_{sv} ..$$

Also ist $R \Sigma \pm \alpha_{fi} \alpha_{gk} .. = R^h \Sigma \pm a_{ru} a_{sv} ..$,

$$\Sigma \pm \alpha_{fi} \alpha_{gk} .. : \Sigma \pm a_{ru} a_{sv} .. = R^{h-1}$$

Aus der Identität $R(\Sigma \pm \alpha_{fi} \alpha_{gk} .. - R^{h-1} \Sigma \pm a_{ru} a_{su} ..) = 0$ schliesst man, dass bei einem System von $n^2$ beliebigen Elementen

$$\Sigma \pm \alpha_{fi} \alpha_{gk} .. - R^{h-1} \Sigma \pm a_{ru} a_{sv} .. = 0$$

eine Identität ist, also auch bei einem System, dessen Determinante $R = 0$. Vergl. §. 3, 8.

**Beispiele.** Wenn $R = \Sigma \pm a_{11} a_{22} .. a_{nn}$, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & .. & \alpha_{1m} \\ . & .. & . \\ \alpha_{m1} & .. & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & .. & a_{m+1,n} \\ . & .. & . \\ a_{n,m+1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & .. & \alpha_{k+1,n} \\ . & .. & . \\ \alpha_{n,k+1} & .. & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = R^{n-k-1} \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1k} \\ . & .. & . \\ a_{k1} & .. & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Wenn insbesondere $n = 5$ ist, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} = R^2 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} \\ a_{35} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Die Subdeterminante $(n-1)$ten Grades des Systems $\alpha$, deren Adjuncte $\alpha_{ik}$ ist, hat den Werth $R^{n-2}\, a_{ik}$ *).

Wenn insbesondere $n = 3$, so ist **)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = Ra_{33}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = Ra_{31} \text{ u. s. w.}$$

Wenn $S = \Sigma \pm a_{00}\, a_{11} \, ..$, so ist

$$\begin{vmatrix} \operatorname{adj} a_{00} & \operatorname{adj} a_{01} \\ \operatorname{adj} a_{10} & \operatorname{adj} a_{11} \end{vmatrix} = S \,.\, \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Nach den Voraussetzungen §. 5, 7 ist $\operatorname{adj} a_{00} = 0$, $\operatorname{adj}(a_{00}\, a_{11} - a_{01} a_{10}) = \alpha_{11}$, folglich

$$-\operatorname{adj} a_{10} \operatorname{adj} a_{01} = S\alpha_{11}$$

3. Die Adjuncte der Subdeterminante $h$ten Grades $\Sigma \pm a_{fi}\, a_{gk} \, ..$, deren man zur Berechnung der Subdeterminante $\Sigma \pm \alpha_{fi}\, \alpha_{gk} \, ..$ bedarf, kann durch einen Differentialcoefficienten $h$ter Ordnung der Determinante $R$ ausgedrückt werden (§. 3, 14). Es ist ***)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = R \frac{\partial^2 R}{\partial a_{fi}\, \partial a_{gk}}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \alpha_{fl} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \alpha_{gl} \\ \alpha_{hi} & \alpha_{hk} & \alpha_{hl} \end{vmatrix} = R^2 \frac{\partial^3 R}{\partial a_{fi}\, \partial a_{gk}\, \partial a_{hl}} \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Identitäten geben zugleich an, wie man zweite, dritte, .. Differentialcoefficienten einer Determinante durch erste Differentialcoefficienten derselben ausdrücken kann.

**Beispiel.** Weil (§. 3, 15) $dR = \sum_{ik} \alpha_{ik}\, d a_{ik}$ und

$$d\alpha_{rs} = \sum_{ik} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial a_{ik}}\, d a_{ik} = \sum_{ik} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{rs}\, \partial a_{ik}}\, d a_{ik}$$

ist, so findet man

---

*) Cauchy l. c. p. 82.

**) Lagrange sur les pyr. 3.

***) Jacobi Det. 10.

$$R\,d\alpha_{rs} = \sum_{ik}(\alpha_{rs}\,\alpha_{ik} - \alpha_{is}\,\alpha_{rk})\,d\,a_{ik}$$

$$R\,d\alpha_{rs} - \alpha_{rs}\,dR = -\sum_{ik}\alpha_{is}\,\alpha_{rk}\,d\,a_{ik}$$

$$R^2 d\,\frac{\alpha_{rs}}{R} = -\sum_{ik}\alpha_{is}\,\alpha_{rk}\,d\,a_{ik}\text{*)}$$

4. Wenn $V_{r+1} = \Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{r+1,r+1}$, so ist (2)

$$\begin{vmatrix} \text{adj } a_{rr} & \text{adj } a_{r,r+1} \\ \text{adj } a_{r+1,r} & \text{adj } a_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = V_{r+1} \,.\, \text{adj} \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{r,r+1} \\ a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{vmatrix}$$

Nun ist

$$\text{adj } a_{r+1,r+1} = V_r \qquad \text{adj} \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{r,r+1} \\ a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = V_{r-1}$$

folglich

$$V_r \text{ adj } a_{rr} - \text{adj } a_{r,r+1} \text{ adj } a_{r+1,r} = V_{r+1}\, V_{r-1}$$

Wenn insbesondere die correspondirenden Elemente $a_{ik}$ und $a_{ki}$ gleich oder conjugirt complex sind, so sind die Adjuncten der Elemente $a_{r,r+1}$ und $a_{r+1,r}$ gleich oder conjugirt complex (§. 3, 5), ihr Product real und positiv. Also haben, während $V_r$ verschwindet, $V_{r+1}$ und $V_{r-1}$ Werthe von entgegengesetzten Zeichen**).

5. Eine Determinante $n$ten Grades kann unter Einführung zweier nicht proportionaler Reihen von je $n$ Unbestimmten durch eine Determinante 2ten Grades ausgedrückt werden***). Zu diesem Zweck entwickle man die gegebene Determinante nach den Subdeterminanten von 2 Zeilen (§. 4, 1) z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & .. & a_5 \\ . & .. & . \\ e_1 & .. & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} + \,..$$

Nachdem man die beiden Zeilen des Systems durch die Unbestimmten $u_1 \,..\, u_5$ und $v_1 \,..\, v_5$ ersetzt hat, bilde man die Determinante des veränderten Systems

$$w = \begin{vmatrix} u_1 & .. & u_5 \\ v_1 & .. & v_5 \\ c_1 & .. & c_5 \\ d_1 & .. & d_5 \\ e_1 & .. & e_5 \end{vmatrix}$$

*) Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 214.

**) Brioschi Det. p. 72.

***) S. den Aufsatz des Verf. Leipziger Berichte 1773 p. 583.

nebst den Adjuncten

$$\begin{matrix} x_1 & . & . & x_5 \\ y_1 & . & . & y_5 \end{matrix} \quad \text{der Elemente} \quad \begin{matrix} u_1 & . & . & u_5 \\ v_1 & . & . & v_5 \end{matrix}$$

Nun ist (2)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = w \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich ist

$$w \begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_5 \\ . & . & . & . \\ e_1 & . & . & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \ldots$$

die Entwickelung von (§. 6, 1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_5 \\ b_1 & . & . & b_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & . & . & x_5 \\ y_1 & . & . & y_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots & a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots & a_1y_1 + b_2y_2 + \ldots \end{vmatrix}$$

so dass die Grössen $x$ von den Grössen $v$, die Grössen $y$ von den Grössen $u$, und $w$ von beiderlei Grössen lineare Formen sind.

**6.** Analoge Sätze gelten, wenn $p_{ik}$ eine Subdeterminante $m$ten Grades des Systems von $n^2$ Elementen $a$, dessen Determinante $R$, und $q_{ik}$ die Adjuncte der $p_{ik}$ ist, für die adjungirten Systeme (§. 2, 4 u. 5, §. 4, 1)

$$\begin{matrix} p_{11} & . & . & p_{1\mu} \\ . & . & . & . \\ p_{\mu 1} & . & . & p_{\mu\mu} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} q_{11} & . & . & q_{1\mu} \\ . & . & . & . \\ q_{\mu 1} & . & . & q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

Die Determinanten derselben sind Potenzen von $R$, nämlich*)

$$\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu} \Sigma \pm q_{11} \ldots q_{\mu\mu} = R^\mu$$

$$\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu} = R^{\binom{n-1}{m-1}} \qquad \Sigma \pm q_{11} \ldots q_{\mu\mu} = R^{\binom{n-1}{m}}$$

**Beweis.** Das Product $\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu} \Sigma \pm q_{11} \ldots q_{\mu\mu}$ ist eine Determinante $\mu$ten Grades, welche sich auf ihr Anfangsglied $R^\mu$ reducirt, weil ihr Element

$$p_{\gamma 1} q_{\delta 1} + \ldots + p_{\gamma\mu} q_{\delta\mu}$$

den Werth $R$ oder 0 hat, je nachdem die Nummern $\gamma$ und $\delta$ übereinstimmen oder nicht (§. 4, 1).

---

*) Diese Bemerkungen sind die erste von Cauchy l. c. p. 102, die beiden andern von Franke 1862 Crelle J. 61 p. 350 gemacht worden.

Da nun $P = \Sigma \pm p_{11} \,..\, p_{\mu\mu}$ ein Divisor von $R^\mu$ und $R$ eine Function ersten Grades eines Elements z. B. $a_{11}$ ist, so kann $P$ von einer Potenz von $R$ nur durch einen von den Elementen $a$ unabhängigen Coefficienten unterschieden sein. Unter den $\mu = \binom{n}{m}$ Combinationen der Nummern 1 bis $n$ giebt es $\lambda = \binom{n-1}{m-1}$ solche, in denen 1 vorkommt. Es giebt also $\lambda$ Elemente $p$ z. B. $p_{11}$, $p_{22}, \,..,\, p_{\lambda\lambda}$, welche Functionen ersten Grades von $a_{11}$ sind, mithin ist $P = \alpha R^\lambda$. Wenn insbesondere die nicht diagonalen Elemente $a$ null, die diagonalen 1 sind, so sind die nicht diagonalen Elemente $p$ null, die diagonalen 1, $R = 1$, $P = 1$, folglich ist $\alpha = 1$,

$$P = R^\lambda, \quad Q = \Sigma \pm q_{11} \,..\, q_{\mu\mu} = R^{\mu-\lambda}$$

7. Eine Subdeterminante $h$ten Grades des Systems $q$ hat zur Adjuncte der entsprechenden Subdeterminante des Systems $p$ das Verhältniss $R^h : P$. Subdeterminanten desselben Grades des Systems $q$ verhalten sich zu einander, wie die Adjuncten der entsprechenden Subdeterminanten des Systems $p$ *).

Wie oben (2) findet man die Identitäten

$$P \Sigma \pm q_{fi}\, q_{gk} \,.. = R^h \operatorname{adj} \Sigma \pm p_{fi}\, p_{gk} \,..$$
$$Q \Sigma \pm p_{fi}\, p_{gk} \,.. = R^h \operatorname{adj} \Sigma \pm q_{fi}\, q_{gk} \,..$$

folglich

$$\Sigma \pm q_{fi}\, q_{gk} \,.. : \operatorname{adj} \Sigma \pm p_{fi}\, p_{gk} \,.. = R^{h-\lambda}$$
$$\Sigma \pm p_{fi}\, p_{gk} \,.. : \operatorname{adj} \Sigma \pm q_{fi}\, q_{gk} \,.. = R^{h-(\mu-\lambda)}$$

Wenn $R = 0$, so sind alle Subdeterminanten $(\lambda+1)$ten und höhern Grades des Systems $q$, so wie alle Subdeterminanten $(\mu-\lambda+1)$ten und höhern Grades des Systems $p$ null. Vergl. §. 3, 8.

---

*) Franke l. c. und Borchardt's Anmerkung zu diesem Aufsatz.



# Zweiter Abschnitt.

# Anwendungen der Determinanten.

---

## §. 8. Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen.

1. Wenn $u_1, .., u_n$ lineare Formen (homogene Functionen) der Variablen $x_1, .., x_n$ sind, nämlich

$$\begin{array}{l} u_1 = a_{11}\,x_1 + \cdot\cdot + a_{1n}\,x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = a_{n1}\,x_1 + \cdot\cdot + a_{nn}\,x_n \end{array}$$

so heisst die Determinante $n$ten Grades der Coefficienten

$$R = \Sigma \pm a_{11} \, .. \, a_{nn}$$

die Determinante des Systems der linearen Formen $u_1, .., u_n$ *).

Wenn die Determinante $R$ nicht verschwindet, so gehört zu jedem System von endlichen Werthen $u_1, .., u_n$ ein bestimmtes System von endlichen Werthen $x_1, .., x_n$. Man findet

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & .. & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1,k-1} & u_1 & a_{1,k+1} & .. & a_{1n} \\ . & .. & . & . & . & .. & . \\ a_{n1} & .. & a_{n,k-1} & u_n & a_{n,k+1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

indem man in $R$ die $k$te Colonne mit $x_k$ multiplicirt, und dann die übrigen der Reihe nach mit $x_1, x_2, ..$ multiplicirten Colonnen zur $k$ten Colonne addirt (§. 3, 7). Z. B.

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}$$

folglich in üblicher Abkürzung

$$(abc)x = (dbc), \quad (abc)y = (adc), \quad (abc)z = (abd)$$

---

*) Jacobi Det. 7.

Nach Berechnung der Adjuncten aller Colonnen erhält man, wenn die Adjuncte des Elements $a_{ik}$ durch $\alpha_{ik}$ bezeichnet wird *),

$$Rx_k = \alpha_{1k} u_1 + \cdots + \alpha_{nk} u_n$$

Denn von der Summe $\alpha_{1k} u_1 + \cdots + \alpha_{nk} u_n$ bleibt nur das Glied $Rx_k$ übrig, weil $\alpha_{1k} a_{1i} + \cdots + \alpha_{nk} a_{ni}$ den Werth 0 oder $R$ hat, je nachdem $i$ von $k$ verschieden ist oder nicht (§. 3, 2).

Anmerkung. Die lineare Form $v = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ kann als lineare Form der $u_1, \ldots, u_n$ dargestellt werden, deren Determinante $R$ nicht null ist, weil

$$Rv = c_1(\alpha_{11} u_1 + \cdots) + c_2(\alpha_{12} u_1 + \cdots) + \cdots$$

In der That findet man

$$0 = \begin{vmatrix} v & c_1 & c_2 & \cdot \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \cdot \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = Rv + \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 & \cdot \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \cdot \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

bei allen Werthen $x$, wenn man die Werthe $v, u_1, \ldots$ substituirt (§. 3, 6).

2. Wenn die Werthe $x_1, \ldots, x_n$ dem System von $n-1$ homogenen Gleichungen

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{i,n-1} x_{n-1} + a_{in} x_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

genügen, so genügen die Quotienten $x_1 : x_n$, $x_2 : x_n$, .. dem System von $n-1$ nicht homogenen Gleichungen

$$a_{i1} y_1 + \cdots + a_{i,n-1} y_{n-1} + a_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

für ebensoviel Unbekannte $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Die Auflösung eines Systems von nicht homogenen linearen Gleichungen ist daher enthalten in der Auflösung eines congruenten Systems von homogenen linearen Gleichungen.

Dem System von $n$ homogenen linearen Gleichungen (1) $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$ genügen verschiedene Systeme von Werthen der $n$ Unbekannten, je nachdem die Determinanten $n$ten und niedern Grades des linearen Systems von Null verschieden oder null sind.

---

*) Diese Auflösung ist die von Leibniz, später von Cramer angegebene. Vergl. §. 1 und §. 2.

I. Wenn die Determinante $n$ten Grades ($R$) nicht null ist, so wird dem gegebenen System von Gleichungen nur durch die Werthe $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ genügt. In der Identität (1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist die zweite Determinante null nach der Voraussetzung $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$. Nun ist die Determinante $R$ nicht null, folglich $x_1 = 0$. U. s. w.

II. Wenn die Determinante $n$ten Grades null*), eine Subdeterminante $(n-1)$ten Grades nicht null ist, so ist das System der Gleichungen 1fach unbestimmt, eine Gleichung desselben überflüssig. In der Identität

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & a_{n2} & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

sind beide Determinanten null, die zweite nach der allgemeinen, die erste nach der besondern Voraussetzung. Die Entwickelung der zweiten Determinante nach den Elementen einer Colonne giebt

$$bu_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n = 0$$

eine homogene lineare Gleichung, welche, wenn $b$ nicht null, $u_1$ an $u_2, \ldots, u_n$ bindet. Die Coefficienten sind den Adjuncten einer Colonne proportional (vergl. §. 3, 8). Aus den Adjuncten einer Zeile der ersten Determinante $b, \beta_2, \ldots, \beta_n$ bildet man die Werthe

$$x_2 = \frac{\beta_2}{b}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\beta_n}{b}$$

welche bei beliebigem $x_1$ den gegebenen Gleichungen genügen. Denn

$$bu_r = ba_{r1}x_1 + \beta_2 a_{r2} + \cdots + \beta_n a_{rn}$$

ist null nicht nur für $i = 2, \ldots, n$, sondern auch nach der besondern Voraussetzung für $r = 1$.

*) Jacobi Det. 7. Die Gleichung $R = 0$ (»aequatio resultans« Newton Arithm. univ. p. 58) heisst die Resultante der linearen Gleichungen $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$. Bézout Hist. de l'Acad. de Paris 1764 p. 288.

III. Wenn die Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null sind und eine Subdeterminante $(n-2)$ten Grades nicht null ist, so ist das System der Gleichungen 2fach unbestimmt, 2 Gleichungen desselben sind überflüssig. In der Identität

$$\begin{vmatrix} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 & a_{i3} & \cdots \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 & a_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & a_{n3} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i & a_{i3} & \cdots \\ u_3 & a_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ u_n & a_{n3} & \cdots \end{vmatrix}$$

sind beide Determinanten $(n-1)$ten Grades null, die zweite nach der allgemeinen, die erste nach der besondern Voraussetzung. Die Entwickelung der zweiten Determinante nach den Elementen einer Colonne giebt

$$cu_i + c_3 u_3 + \cdots + c_n u_n = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

2 homogene lineare Gleichungen, welche, wenn $c$ nicht null, $u_1$ und $u_2$ an $u_3, \ldots u_n$ binden. Aus den Adjuncten einer Zeile der ersten Determinante $c, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ bildet man die Werthe

$$x_3 = \frac{\gamma_3}{c}, \ldots, x_n = \frac{\gamma_n}{c}$$

welche bei beliebigen $x_1$, $x_2$ den gegebenen Gleichungen genügen. Denn

$$cu_r = c(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2) + \gamma_3 a_{r3} + \cdots + \gamma_n a_{rn}$$

ist null nicht nur für $r = 3, \ldots, n$, sondern auch nach der besondern Voraussetzung für $r = 1, 2$.

IV. Wenn die Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades null sind und eine Subdeterminante $(n-3)$ten Grades nicht null ist, so ist das System der Gleichungen 3fach unbestimmt. Durch Entwickelung der identischen Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 & a_{i4} & \cdots \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 & a_{n4} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i & a_{i4} & \cdots \\ u_4 & a_{44} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ u_n & a_{n4} & \cdots \end{vmatrix}$$

nach den Elementen einer Colonne und nach den Elementen einer Zeile findet man 3 homogene lineare Gleichungen, welche die $u$ verbinden, sowie die Werthe $x_4, \ldots, x_n$, welche bei beliebigen $x_1$, $x_2$, $x_3$ den gegebenen Gleichungen genügen*). U. s. w.

---

*) Die Unterscheidung der möglichen Fälle und die Angabe der ent-

3. Zufolge der Kette von trinomischen homogenen linearen Gleichungen

$$a_1 u = b_1 u_1 + u_2$$
$$a_2 u_1 = b_2 u_2 + u_3$$
$$\dots\dots$$

ist

$$\frac{u_1}{u} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{u_2}{u_1}} \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{a_2}{b_2 + \frac{u_3}{u_2}} \qquad \dots$$

mithin $\frac{u_1}{u}$ der aus den Gliedern $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, .. gebildete Kettenbruch. Sein aus $k$ Gliedern successiv zu berechnender Näherungswerth ergiebt sich aus dem obigen linearen System unter der Voraussetzung $u_{k+1} = 0$. Wenn z. B.

$$\begin{array}{rcccc} a_1 u = & b_1 u_1 + & u_2 & & \\ 0 = & - a_2 u_1 + & b_2 u_2 + & u_3 & \\ 0 = & * & - a_3 u_2 + & b_3 u_3 + & u_4 \\ 0 = & * & * & - a_4 u_3 + & b_4 u_4 \end{array}$$

so ist (1)

$$\begin{vmatrix} b_1 & 1 & & \\ -a_2 & b_2 & 1 & \\ & -a_3 & b_3 & 1 \\ & & -a_4 & b_4 \end{vmatrix} u_1 = \begin{vmatrix} a_1 u & 1 & & \\ & b_2 & 1 & \\ & -a_3 & b_3 & 1 \\ & & -a_4 & b_4 \end{vmatrix} = a_1 u \begin{vmatrix} b_2 & 1 & \\ -a_3 & b_3 & 1 \\ & -a_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$\frac{u_1}{u} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 1 & \\ -a_3 & b_3 & 1 \\ & -a_4 & b_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & 1 & & \\ -a_2 & b_2 & 1 & \\ & -a_3 & b_3 & 1 \\ & & -a_4 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Wenn der Nenner durch $R$ bezeichnet wird, so ist der Zähler $a_1 \frac{\partial R}{\partial b_1}$ (§. 3, 14), mithin der Näherungswerth $a_1 \frac{\partial \log R}{\partial b_1}$ *).

4. Bei besondrer Beschaffenheit der Coefficienten giebt es besondre Methoden zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen.

---

sprechenden Auflösungen (»paullo prolixum negotium« JACOBI l. c.), sowie die Construction von entsprechenden Systemen (§. 6, 7) verdankt man KRONECKER. S. die 2te Auflage dieses Buchs 1864 p. 62.

*) SPOTTISWOODE 1853 Crelle J. 51 p. 374. BAUER Münchner Acad. 1872. Vergl. §. 3, 11.

Wenn die Coefficienten des in (4) betrachteten Systems von der Art sind, dass

$$a_{ki} = -a_{ik}, \qquad a_{ii} = 0$$

und wenn $n$ **gerade** ist, so hat man nach den Sätzen und Bezeichnungen von §. 5, 8 die Auflösung *)

$$(-1)^k(1, 2, .., n)x_k = u_1(2, .., k-1, k+1, .., n) + u_2(3, .., k-1, k+1, .., n, 1) + \cdots + u_n(1, .., k-1, k+1, .., n-1)$$

Multiplicirt man nämlich die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$(2, .., k-1, k+1, .., n), \ (3, .., k-1, k+1, .., n, 1), .., \ (1, .., k-1, k+1, .., n-1)$$

und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bekommt $x_k$ den Coefficienten

$$a_{1k}(2, .., n) + a_{2k}(3, .., n, 1) + \cdots + a_{nk}(1, .., n-1)$$

dessen Werth durch

$$-(k, 1, .., k-1, k+1, .., n) = (-1)^k(1, 2, .., n)$$

ausgedrückt wird. Dagegen hat $x_i$ in der erhaltenen Summe den Coefficienten

$$-(i, 1, .., k-1, k+1, .., n)$$

welcher identisch verschwindet.

5. Wenn die Coefficienten des linearen Systems von der Art sind, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad a_{ii} = 0$$

und $n$ **ungerade** ist, so ist $R = 0$ (§. 3, 5), und den gegebenen Gleichungen genügen im Allgemeinen nur unendliche Werthe von $x_1$, $x_2$, .., welche zu einander bestimmte Verhältnisse haben (2).

Wenn jedoch die Werthe $u_1$, $u_2$, .. der Bedingung

$$u_1 \alpha_{1k} + u_2 \alpha_{2k} + \cdots + u_n \alpha_{nk} = 0$$

genügen, so ist eine Gleichung des Systems überflüssig und das System der übrigen Gleichungen nach (4) auflösbar.

*) Jacobi Crelle J. 2 p. 356.

1889 May 5

Vermöge der Identität (§. 5, 8)

$$\alpha_{ik} = (i+1, .., n, 1, .., i-1)(k+1, .., n, 1, .., k-1)$$

reducirt sich jene Bedingung auf

$$u_1(2, .., n) + u_2(3, .., n, 1) + \cdot\cdot + u_n(1, .., n-1) = 0\text{*)}$$

**Beispiel.** Dem System

$$\begin{array}{cccl} * & cy & -bz & = f \\ -cx & * & +az & = g \\ bx & -ay & * & = h \end{array}$$

genügen im Allgemeinen unendliche Werthe $x$, $y$, $z$, die sich zu einander wie $a : b : c$ verhalten, vorausgesetzt dass keine der Grössen $a$, $b$, $c$ null ist. Wenn aber

$$af + bg + ch = 0$$

ist, so folgt aus 2 Gleichungen des Systems die dritte, das System ist unbestimmt.

1893 Mch 5

Andre lineare Systeme von besonderer Art werden unten (§. 10) aufgelöst.

## §. 9. Lehrsätze über die linearen Differentialgleichungen.

1. Die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche kein von der Function unabhängiges Glied enthält, können aus $n$ particulären Integralen derselben in ähnlicher Weise zusammengesetzt werden, wie die Coefficienten einer algebraischen Gleichung aus den Wurzeln derselben**). Wenn nämlich $y_1$, $y_2$, .., $y_n$ particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung

$$0 = a_0 y + a_1 y' + \cdot\cdot + a_n y^{(n)}$$

bedeuten, wobei $y'$, $y''$, .. die Differentialcoefficienten der Function $y$ von $x$ und die Grössen $a_0, a_1, .., a_n$ von $y$, $y'$, .. unabhängig sind, so gelten die Gleichungen

$$\begin{array}{l} 0 = a_0 y_1 + a_1 y_1' + \cdot\cdot + a_n y_1^{(n)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 = a_0 y_n + a_1 y_n' + \cdot\cdot + a_n y_n^{(n)} \end{array}$$

*) Jacobi l. c.

**) Vergl. Libri Crelle J. 10 p. 189.

Die $n+1$ Grössen $a_0, a_2, \ldots$, welche $n+1$ homogenen linearen Gleichungen genügen, sind nicht alle null unter der Bedingung (§. 8, 2)

$$\begin{vmatrix} y & y' & \cdot\cdot & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \cdot\cdot & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdot\cdot & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung hat die gegebenen particulären Integrale. Die Coefficienten von $y, y', \ldots$ sind proportional den aus den particulären Integralen gebildeten Adjuncten der ersten Zeile.

**2.** Wenn $y_1, \ldots, y_n$ particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$0 = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)}$$

sind, so hat man insbesondere

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdot\cdot & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdot\cdot & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdot\cdot & y_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdot\cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Nun ist der Dividendus der Differentialcoefficient des Divisor (§. 3, 15), folglich *)

$$\frac{d}{dx} \log \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdot\cdot & y_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdot\cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdot\cdot & y_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdot\cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}$$

**3.** Die Integration der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$\text{(I)} \qquad a = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)}$$

worin $a, a_0, a_1, \ldots$ von $y, y', \ldots$ unabhängig sind, lässt sich auf die Integration einer linearen Differentialgleichung $(n-m)$ter

---

*) Abel Crelle J. 2 p. 22. Vergl. Malmstén Crelle J. 39 p. 91 und Tissot Liouv. J. 17 p. 178.

Ordnung reduciren, wenn $m$ particuläre Integrale der einfacheren linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$\text{(II)} \qquad 0 = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)}$$

gegeben sind. Lagrange (Miscell. Taur. 3 p. 179) hat diesen Satz 1764 ausgesprochen und die Möglichkeit der Reduction nachgewiesen. Die Reduction ist von D'Alembert (l. c. p. 381) in kurzen Umrissen ausgeführt worden, mit dessen Verfahren Libri's Abhandlung über diesen Gegenstand (Crelle J. 10 p. 185) zusammentrifft. Nachdem mit Hülfe der Determinanten von Malmstèn (Crelle J. 39 p. 91) die Ableitung des allgemeinen Integrals der Gleichung (II) aus $n-1$ particulären Integralen derselben gezeigt worden war, hat Joachimsthal (Crelle J. 40 p. 48) auch die Reduction der allgemeinern linearen Differentialgleichung (I) durch $m$ gegebene particuläre Integrale der Gleichung (II) auf analoge Weise ausgeführt. Das hierzu dienliche Verfahren ist zum grossen Theil bereits von Lagrange vorgezeichnet, der in einer spätern Abhandlung (Mém. de Berlin 1775 p. 190) das allgemeine Integral der Gleichung (I) durch $n$ particuläre Integrale der Gleichung (II) dargestellt hat.

Wenn die von $x$ abhängigen Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ gegebene particuläre Integrale der Gleichung (II) bedeuten, so lassen sich ebensoviel Functionen von $x$, welche durch $b_1, b_2, \ldots, b_m$ bezeichnet werden, nach Auflösung einer allgemeinen linearen Differentialgleichung $(n-m)$ter Ordnung durch $m$ Quadraturen dergestalt bestimmen, dass

$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$$

das allgemeine Integral der Gleichung (I) wird. Bezeichnet man nämlich

$$\frac{d^k y_i}{d x^k} \text{ durch } y_{ik}, \quad \frac{d b_i}{dx} \text{ durch } b_{i1}$$

so erhält man

$$\begin{array}{lll} y' & = b_1 y_{11} & + \cdots + b_m y_{m1} \\ y'' & = b_1 y_{12} & + \cdots + b_m y_{m2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^{(m-1)} & = b_1 y_{1,m-1} & + \cdots + b_m y_{m,m-1} \end{array}$$

unter den Bedingungen

$$
\begin{aligned}
b_{11} y_1 \quad &+ \cdots + b_{m1} y_m &= 0 \\
b_{11} y_{11} \quad &+ \cdots + b_{m1} y_{m1} &= 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\
b_{11} y_{1,m-2} &+ \cdots + b_{m1} y_{m,m-2} &= 0
\end{aligned}
$$

welche die Verhältnisse $b_{11} : b_{21} : b_{31} : \ldots$ bestimmen. Ferner erhält man

$$y^{(m)} = b_1 y_{1m} + \cdots + b_m y_{mm} + z$$

wo

$$b_{11} y_{1,m-1} + \cdots + b_{m1} y_{m,m-1} = z$$

eine bestimmte Function von $x$. Ebenso ist

$$y^{(m+1)} = b_1 y_{1,m+1} + \cdots + b_m y_{m,m+1} + z' + z_1$$

wenn

$$b_{11} y_{1m} + \cdots + b_{m1} y_{mm} = z_1, \quad \frac{dz}{dx} = z'$$

$$y^{(m+2)} = b_1 y_{1,m+2} + \cdots + b_m y_{m,m+2} + z'' + z_{11} + z_2$$

wenn

$$b_{11} y_{1,m+1} + \cdots + b_{m1} y_{m,m+1} = z_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = z_{11}$$

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} = b_1 y_{1n} + \cdots + b_m y_{mn} &+ z^{(n-m)} \\
&+ z_{1,n-m-1} + \cdots + z_{n-m-1,1} + z_{n-m}
\end{aligned}
$$

wenn

$$b_{11} y_{1,n-1} + \cdots + b_{m1} y_{m,n-1} = z_{n-m}$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_0, a_1, \ldots$ multiplicirt und dann addirt, so findet man vermöge der über $y_1, y_2, \ldots, y_m$ gemachten Voraussetzungen

$$
\begin{aligned}
a = a_m z + a_{m+1} z' + a_{m+2} z'' &+ \cdots + a_n z^{(n-m)} \\
+ a_{m+1} z_1 + a_{m+2} z_{11} &+ \cdots + a_n z_{1,n-m-1} \\
+ a_{m+2} z_2 &+ \cdots + a_n z_{2,n-m-2} \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ a_n z_{n-m}
\end{aligned}
$$

als Bedingung, unter welcher $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$ ein Integral der Gleichung (I) ist.

Zur Berechnung der Grössen $b_1, \ldots, b_m, z_1, z_2, \ldots$ bilde man die Determinante $m$ten Grades

$$R_\mu = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,m-2} & y_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_{m1} & \cdot\cdot & y_{m,m-2} & y_{m\mu} \end{vmatrix}$$

und die Adjuncten $\eta_1, \ldots, \eta_m$ der letzten Colonne. Wenn man die $i$te Zeile mit $b_{i1}$ multiplicirt und zu ihr die übrigen der Reihe nach mit $b_{11}, b_{21}, \ldots$ multiplicirten Zeilen addirt, so verschwinden ihre Elemente mit Ausnahme des letzten, welches für $\mu = m-1, m, m+1, \ldots$ die Werthe $z, z_1, z_2, \ldots$ annimmt. Also ist

$$b_{i1} R_{m-1} = \eta_i z, \quad b_{i1} R_m = \eta_i z_1, \quad b_{i1} R_{m+1} = \eta_1 z_2, \ldots$$

$$z_1 = \frac{R_m z}{R_{m-1}} = c_1 z, \quad z_2 = \frac{R_{m+1} z}{R_{m-1}} = c_2 z, \ldots$$

$$b_{i1} = \frac{\eta_i z}{R_{m-1}}, \quad b_i = \int \frac{\eta_i z}{R_{m-1}} dx$$

Die Grössen $c_1, c_2, \ldots$ sind gegebene Functionen von $x$, mithin werden, nachdem $z$ gefunden ist, $b_1, b_2, \ldots$ durch Quadraturen berechnet. Durch Differentiation findet man

$$\begin{aligned} z_{i1} &= c_{i1} z + c_i z' \\ z_{i2} &= c_{i2} z + 2 c_{i1} z' + c_i z'' \\ z_{i3} &= c_{i3} z + 3 c_{i2} z' + 3 c_{i1} z'' + c_i z''' \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} a = \; & a_m z \\ & + a_{m+1} \; (c_1 z + z') \\ & + a_{m+2} \left| \begin{array}{l} c_{11} z + c_1 z' + z'' \\ + c_2 z \end{array} \right. \\ & + a_{m+3} \left| \begin{array}{l} c_{12} z + 2 c_{11} z' + c_1 z'' + z''' \\ + c_{21} z + c_2 z' \\ + c_3 z \end{array} \right. \\ & + a_{m+4} \left| \begin{array}{l} c_{13} z + 3 c_{12} z' + 3 c_{11} z'' + c_1 z^{(3)} + z^{(4)} \\ + c_{22} z + 2 c_{21} z' + c_2 z'' \\ + c_{31} z + c_3 z' \\ + c_4 z \end{array} \right. \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

die lineare Gleichung $(m-n)$ter Ordnung, welcher die Function $z$ zu genügen hat. Aus dem Werth $z$ lassen sich dann die Functionen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ berechnen, so dass

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$$

ein Integral der Gleichung (I) wird. Da in den particulären Integralen $y_1, y_2, .., y_m$ nach üblicher Voraussetzung unbestimmte Constanten nicht vorkommen, da ferner das allgemeine Integral $z$ der zuletzt gefundenen linearen Gleichung $n-m$ unbestimmte Constanten enthält, und durch $m$ Quadraturen bei der Berechnung von $b_1, b_2, .., b_m$ andere $m$ unbestimmte Constanten entstehen, so hat das gefundene Integral der Gleichung (I) die erforderliche Anzahl von $n$ unbestimmten Constanten, und ist das allgemeine Integral derselben.

4. Die lineare Differentialgleichung, welche zur Integration der gegebenen Differentialgleichung zu lösen übrig bleibt, ist im Allgemeinen nicht lösbar, wenn sie die erste Ordnung übersteigt. Also kommen besonders die Fälle $m=n$ und $m=n-1$ in Betracht.

Für $m=n$ ist $a=a_n z$,

$$R_{n-1} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$\eta_i$ die Adjuncte von $y_{i,n-1}$ und

$$b_{i1}\, R_{n-1} = \eta_i z, \qquad b_i = \int \frac{a\,\eta_i}{a_n R_{n-1}}\, dx$$

folglich ist das allgemeine Integral der Gleichung (I)

$$y = y_1 \int \frac{a\,\eta_1}{a_n R_{n-1}}\, dx + \,..\, + y_n \int \frac{a\,\eta_n}{a_n R_{n-1}}\, dx$$

wie Lagrange a. a. O. bemerkt hat.

Für $m=n-1$ ist $a=a_{n-1}z+a_n(c_1 z+z')$ und $\eta_i$ der Coefficient von $y_{i\mu}$ in

$$R_\mu = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & & y_{1,n-3} & y_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1} & y_{n-1,1} & \cdot\cdot & y_{n-1,n-3} & y_{n-1,\mu} \end{vmatrix}$$

$\eta_i$ die Adjuncte von $y_{i\mu}$ und

$$c_1 = \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}}$$

Nun ist $dR_{n-1} = R_{n-2}\,dx$ (§. 3, 15), folglich

$$aR_{n-2} = a_{n-1}R_{n-2}z + a_n(R_{n-1}z + R_{n-2}z') = a_{n-1}R_{n-2}z + a_n(R_{n-2}z)'$$

Zur Auflösung dieser Gleichung bedarf man eines particulären Integrals $u_1$ der Gleichung $0 = a_{n-1}u + a_n u'$, nämlich

$$u_1 = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}$$

Setzt man nun das zunächst gesuchte allgemeine Integral

$$R_{n-2} z = u_1 v_1$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$(R_{n-2} z)' = u_{11} v_1 + u_1 v_{11}$$

so erhält man, weil $a_{n-1} u_1 + a_n u_{11}$ nach der Voraussetzung verschwindet,

$$a R_{n-2} = a_n u_1 v_{11}, \qquad v_1 = \int \frac{a R_{n-2}}{a_n u_1} dx$$

mit einer unbestimmten Constante. Zur Bestimmung von $b_i$ hat man endlich

$$b_{i1} = \frac{\eta_i z}{R_{n-2}} = \frac{u_1 v_1}{R_{n-2}^2} \eta_i$$

$$b_i = \int \frac{u_1 v_1}{R_{n-2}^2} \eta_i \, dx$$

mit je einer neuen unbestimmten Constante, so dass

$$y = b_1 y_1 + \cdots + b_{n-1} y_{n-1}$$

das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist, wie JOACHIMSTHAL (l. c.) bemerkt hat. Den besondern Fall $a = 0$, in welchem $v_1$ selbst zur unbestimmten Constante wird, hatte MALMSTÈN (l. c.) früher analog behandelt.

## §. 10. Product aller Differenzen von gegebenen Grössen.

1. Wenn man in der Reihe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jede von allen folgenden subtrahirt, so erhält man $\frac{1}{2}n(n-1)$ Differenzen, deren Product

$$\begin{array}{llll}
(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) & \ldots & (\alpha_n - \alpha_1) \\
\qquad\qquad (\alpha_3 - \alpha_2) & \ldots & (\alpha_n - \alpha_2) \\
 & \ldots & \ldots \\
 & & (\alpha_n - \alpha_{n-1})
\end{array}$$

durch $\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$ bezeichnet wird. Dieses Product reducirt sich auf eine Determinante $n$ten Grades, deren Zeilen geometrische Progressionen enthalten, nämlich *)

$$\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**Beweis.** Das Product $\Delta$ ist alternirend (§. 1, 4). Wenn nun $\alpha_1^a \alpha_2^b \alpha_3^c ..$ ein Glied von $\Delta$ ist, so ist $\alpha_2^a \alpha_1^b \alpha_3^c ..$ ein Glied von $-\Delta$, folglich $-\alpha_2^a \alpha_1^b \alpha_3^c ..$ ein Glied von $\Delta$. Diese beiden Glieder von $\Delta$ sind entgegengesetzt gleich, wenn die Exponenten $a$ und $b$ einander gleich sind. Also braucht man, um alle Glieder des Products zu bilden, für die Exponenten $a, b, c, ..$ nur verschiedene Zahlen zu setzen, und zwar Zahlen der Reihe $0, 1, .., n-1$, weil kein Exponent den Werth $n$ erreichen kann. Die Glieder, welche aus

$$\alpha_1^0 \alpha_2^1 \alpha_3^2 \dots \alpha_n^{n-1}$$

durch gegenseitige Vertauschung der Exponenten entspringen, lassen sich auch durch gegenseitige Vertauschung der Dignanden ableiten, und sind Glieder von $\Delta$ oder von $-\Delta$, je nachdem sie durch Permutationen der einen oder der andern Classe entstanden. Also ist das Product $\Delta$ von der Determinante

$$\Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \dots \alpha_n^{n-1}$$

nicht verschieden (§. 2, 2).

Von allen $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ Gliedern des Products bleiben nur $n!$ übrig, also

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| bei | 3 | Grössen | 6 | statt | 8 |
| » | 4 | » | 24 | » | 64 |
| » | 5 | » | 120 | » | 1024 u. s. w. |

---

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 48. Analyse algébr. III, 2 und Note IV. Jacobi Crelle J. 22 p. 360. Das Product der Differenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung war von Waring, Lagrange, Vandermonde betrachtet worden. Bei dem Letztern findet man nur den besondern Fall des obigen Satzes

$$(b-a)(c-a)(c-b) = ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$$

Hist. de l'Acad. de Paris 1771 p. 369.

**Beispiel.**

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\beta_1 & \beta_1^2 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2\beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3\beta_3 & \beta_3^2 \end{vmatrix}$$

2. Jede ganze alternirende Function der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ist durch das Product der Differenzen $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ theilbar*). Denn durch die gegenseitige Vertauschung von irgend zwei Variablen erhält die Function den entgegengesetzt gleichen Werth; daher verschwindet sie, wenn die beiden Variablen von einander sich nicht unterscheiden (§. 2, 4); also ist sie durch die Differenz derselben, mithin durch das Product $\Delta$ theilbar.

Der Quotient der ganzen alternirenden Function durch das Product der Differenzen ihrer Variablen ist je nach der Anzahl der Dimensionen entweder eine von den Variablen unabhängige Zahl, oder eine (permanent) symmetrische Function der Variablen.

Z. B. die Determinante (1) $\Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^{n-1}$ ist eine ganze alternirende Function von ebensoviel Dimensionen als das Product $\Delta$. Der Quotient der Determinante durch das Product ist 1, weil das Anfangsglied der Determinante mit dem Anfangsglied des Products auch dem Zeichen nach übereinstimmt. In der That ist (§. 3, 6)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . \\ 0 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2^2-\alpha_1^2 & . \\ 0 & \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3^2-\alpha_1^2 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_1+\alpha_3 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

u. s. w. Andre Beispiele solcher Quotienten kommen im Folgenden vor. Die allgemeine Berechnung derselben ist von Jacobi Crelle J. 22 p. 365 gezeigt worden.

---

*) Cauchy l. c. p. 46.

3. I. Wenn $\varphi_i(x)$ eine ganze Function $i$ten Grades von $x$ ist, in der die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat, so findet man *)

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(\alpha_1) & \cdot\cdot & \varphi_{n-1}(\alpha_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_1(\alpha_n) & \cdot\cdot & \varphi_{n-1}(\alpha_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdot\cdot & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \cdot\cdot & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta$$

indem man zur letzten, vorletzten, .. Colonne in $\Delta$ die mit den erforderlichen Coefficienten multiplicirten voranstehenden Colonnen addirt (§. 3, 7). Wenn die höchsten Potenzen von $x$ andre Coefficienten haben, so ist die Determinante $\Delta$ mit dem Product dieser Coefficienten zu multipliciren. Wenn z. B.

$$\varphi_i(x) = \binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\,..\,(x-i+1)}{1\,.\,2\;..\;i}$$

so findet man

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{\alpha_1}{1} & \cdot\cdot & \binom{\alpha_1}{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & \binom{\alpha_n}{1} & \cdot\cdot & \binom{\alpha_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{2^{n-2}\,.\,3^{n-3}\,..\,(n-1)}$$

Und wenn $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha+1$, .., $\alpha_n = \alpha+n-1$, so ist

$$\Delta = 2^{n-2}\,.\,3^{n-3}\,..\,(n-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{\alpha}{1} & \cdot\cdot & \binom{\alpha}{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & \binom{\alpha+n-1}{1} & \cdot\cdot & \binom{\alpha+n-1}{n-1} \end{vmatrix} = 1\ ^{**)}$$

II. Wenn $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \,..\, + a_{n-1,i}x^{n-1}$ ist, so hat man

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(\alpha_1) & \cdot\cdot & \varphi_{n-1}(\alpha_1) \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \varphi_0(\alpha_n) & \cdot\cdot & \varphi_{n-1}(\alpha_n) \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{00}\,..\,a_{n-1,n-1}\,\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$$

nach der Multiplicationsregel (§. 6, 1).

Dem angegebenen Lehrsatz steht ein allgemeinerer zur Seite.

*) Borchardt über eine Interpolationsformel. Abhandl. der Berl. Acad. 1860 p. 4.

**) Vergl. §. 3, 7. Stern Crelle J. 66 p. 285.

Wenn

$$F(x,y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)y + \dots + \varphi_{n-1}(x)y^{n-1}$$
$$= \Sigma a_{ik} x^i y^k$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für $i$ und $k$ alle Zahlen von 0 bis $n-1$ setzt, so erhält man bei nochmaliger Anwendung der Multiplicationsregel*)

$$\Sigma \pm F(\alpha_1,\beta_1) \dots F(\alpha_n,\beta_n) = \Sigma \pm a_{00} \dots a_{n-1,n-1} \Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\Delta(\beta_1,\dots,\beta_n)$$

4. Wenn man das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ mit dem Product aller Differenzen der Grössen $\beta_1,\dots,\beta_n$ multiplicirt, so erhält man eine Determinante $n$ten Grades. Nach der Multiplicationsregel (§. 6, 3) ist

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\Delta(\beta_1,\dots,\beta_n)$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \beta_n & \dots & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn

$$c_{ik} = 1 + \alpha_i\beta_k + \alpha_i^2\beta_k^2 + \dots + \alpha_i^{n-1}\beta_k^{n-1} = \frac{1-\alpha_i^n\beta_k^n}{1-\alpha_i\beta_k} \text{ **)}$$

oder wenn

$$c_{ik} = \alpha_1^{i-1}\beta_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\beta_2^{k-1} + \dots + \alpha_n^{i-1}\beta_n^{k-1}$$

Insbesondere ist

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = S_n$$

wenn

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + \dots + \alpha_n^i$$

Denn in diesem Falle reducirt sich das Element $c_{ik}$ der zu bildenden Determinante auf die Summe der $(i+k-2)$ten Potenzen der Grössen $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

Allgemeiner hat man***)

---

*) Borchardt Berl. Monatsbericht 1859 p. 378 und Crelle J. 57 p. 112.

**) Cauchy Exerc. d' anal. 2 p. 169.

***) Cayley Liouv. J. 11 p. 298 und Borchardt Liouv. J. 12 p. 58.

$$\Sigma[\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2] = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix} = S_m$$

wenn die Summe die sämmtlichen $\binom{n}{m}$ Glieder umfasst, welche aus dem Anfangsglied $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2$ dadurch entspringen, dass an die Stelle der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ je $m$ verschiedene aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gesetzt werden. Denn unter der Voraussetzung

$$c_{ik} = s_{i+k-2} = \alpha_1^{i-1}\alpha_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\alpha_2^{k-1} + \ldots + \alpha_n^{i-1}\alpha_n^{k-1}$$

ist die durch $S_m$ bezeichnete Determinante in eine Summe von Quadraten zerlegbar (§. 6, 2), nämlich

$$S_m = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix} = \Sigma\left\{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_m & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2\right\}$$

wobei das Summenzeichen die angegebene Bedeutung hat.

5. Ebenso wird die umfassendere Summe

$$\Sigma\left\{\chi(\alpha_1)\chi(\alpha_2)\ldots\chi(\alpha_m)\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2\right\}$$

durch die Determinante $m$ten Grades

$$T = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \ldots & t_{m-1} \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ t_{m-1} & t_m & \ldots & t_{2m-2} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt*), wenn $\chi(\alpha_i)$ gegeben ist, und

$$t_\mu = \alpha_1^\mu\chi(\alpha_1) + \ldots + \alpha_n^\mu\chi(\alpha_n)$$

Setzt man insbesondere

$$\text{(I)} \qquad \chi(\alpha_i) = b_i(x-\alpha_i)$$

$$u_\mu = b_1\alpha_1^\mu + \ldots + b_n\alpha_n^\mu$$

so wird $t_\mu = u_\mu x - u_{\mu+1}$, und die Determinante $T$ lässt sich in eine Determinante $(m+1)$ten Grades transformiren, wie folgt**).

Nachdem man jede Colonne mit $-1$ multiplicirt hat, findet man (§. 3, 3)

---

*) Joachimsthal Crelle J. 48 p. 394 und Borchardt über eine Interpolationsformel p. 8.

**) Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 129.

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdot\ \cdot & 1 \\ u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ u_m - u_{m-1} x & u_{m+1} - u_m x & \cdot\ \cdot & 0 \end{vmatrix}.$$

Addirt man zur zweiten Zeile die mit $x$ multiplicirte erste Zeile, so behält man in der zweiten Zeile

$$u_1 \quad u_2 \quad . \ . \quad u_m \quad x$$

Wenn man diese mit $x$ multiplicirt und zur dritten Zeile addirt, so behält man in der dritten Zeile

$$u_2 \quad u_3 \quad . \ . \quad u_{m+1} \quad x^2$$

u. s. w. Daher ist unter der Voraussetzung (I)

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdot\ \cdot & u_{m-1} & 1 \\ u_1 & u_2 & \cdot\ \cdot & u_m & x \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_m & u_{m+1} & \cdot\ \cdot & u_{2m-1} & x^m \end{vmatrix}$$

Setzt man ferner

$$\text{(II)} \qquad \chi(\alpha_i) = b_i(x - \alpha_i)(y - \alpha_i)$$

so wird

$$t_\mu = u_{\mu+2} - u_{\mu+1} x - (u_{\mu+1} - u_\mu x) y$$

und die Determinante $T$ kann in eine Determinante $(m+2)$ten Grades transformirt werden. Man hat nämlich wie vorhin

$$T = \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & \cdot\ \cdot \\ 0 & u_2 - u_1 x - (u_1 - u_0 x) y & u_3 - u_2 x - (u_2 - u_1 x) y & \cdot\ \cdot \\ 0 & u_3 - u_2 x - (u_2 - u_1 x) y & u_4 - u_3 x - (u_3 - u_2 x) y & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & \cdot\ \cdot & u_m - u_{m-1} x \\ y & u_2 - u_1 x & \cdot\ \cdot & u_{m+1} - u_m x \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ y^m & u_{m+1} - u_m x & \cdot\ \cdot & u_{2m} - u_{2m-1} x \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot\ \cdot \\ 1 & u_0 & u_1 - u_0 x & \cdot\ \cdot \\ y & u_1 & u_2 - u_1 x & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \cdot\ \cdot & x^m \\ 1 & u_0 & u_1 & \cdot\ \cdot & u_m \\ y & u_1 & u_2 & \cdot\ \cdot & u_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y^m & u_m & u_{m+1} & \cdot\ \cdot & u_{2m} \end{vmatrix}$$

6. Unter der Voraussetzung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$= a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

kann die Determinante $m$ten Grades (4)

$$S_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-1} \end{vmatrix} = \Sigma \{ \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 \}$$

durch die Coefficienten von $f(x)$ ausgedrückt werden. Man bilde aus den $m-2$ Zeilen

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{matrix}$$

und aus den $m$ folgenden Zeilen

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ 0 & 0 & \ldots & s_0 & s_1 & \ldots & \ldots & s_m \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_0 & s_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & s_{2m-3} \\ s_1 & s_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & s_{2m-2} \end{matrix}$$

ein System von $(2m-2)^2$ Elementen, dessen Determinante von $S_m$ nicht verschieden ist (§. 3, 3). Die Colonnen dieses Systems werden transformirt, die erste, indem man sie mit $a_n$ multiplicirt; die zweite, indem man sie mit $a_n$ multiplicirt und zu ihr die mit $a_{n-1}$ multiplicirte erste Colonne addirt; die dritte, indem man sie mit $a_n$ multiplicirt und zu ihr die mit $a_{n-1}$, $a_{n-2}$ multiplicirte 2te, 1te Colonne addirt; u. s. f. Dadurch entsteht das System der $m-2$ Zeilen

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots \\ 0 & 0 & a_n & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{matrix}$$

und der $m-1$ folgenden Zeilen, die mit $m-2$, $m-3$, .. Nullen anfangen,

$$\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & \ldots \\ 0 & \ldots & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 & \ldots \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

und der Schlusszeile

$$a_n s_1 \quad a_n s_2 + a_{n-1} s_1 \quad a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 \quad \cdot \; \cdot \; \cdot$$

Die Determinante dieses Systems hat den Werth $a_n^{2m-2} S_m$ (§. 3, 4. u. 7), und die Elemente können mit Hülfe der NEWTON'schen Identitäten *)

$$\begin{aligned} a_n s_0 &= n a_n \\ a_n s_1 + a_{n-1} s_0 &= (n-1) a_{n-1} \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 &= (n-2) a_{n-2} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \quad \cdot \; \cdot \; \cdot & \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \end{aligned}$$

reducirt werden. Für die Schlusszeile hat man, weil $s_0 = n$ ist,

$$\begin{aligned} a_n s_1 &= -a_{n-1} \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 &= -2a_{n-2} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \quad \cdot \; \cdot \; \cdot & \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \end{aligned}$$

Demnach findet man

$$-a_n^{2m-2} S_m = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot\,\cdot \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdot\,\cdot \\ 0 & 0 & a_n & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \\ 0 & n a_n & (n-1) a_{n-1} & \cdot\,\cdot \\ n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} & \cdot\,\cdot \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} & \cdot\,\cdot \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(2m-2)$ten Grades, bei welcher die $m-2$ ersten und die $m-1$ folgenden Zeilen in Bezug auf die nicht verschwindenden Elemente übereinstimmen. Insbesondere ist

$$-a_n^2 S_2 = \begin{vmatrix} n a_n & (n-1) a_{n-1} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$-a_n^4 S_3 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} \\ n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} & (n-3) a_{n-3} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} & 4a_{n-4} \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

---

*) NEWTON Arithm. univers. ed. 's Gravesande p. 192. Man leitet dieselben am einfachsten aus der Identität der beiden für $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sich darbietenden Ausdrücke ab.

**7.** Das Quadrat des Products von allen Differenzen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (4)

$$S_n = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^2$$

kann durch Werthe des Differentialcoefficienten der Function

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n)$$

ausgedrückt werden. Man hat nämlich

$$\begin{array}{llllll} f'(\alpha_1) = & a_n & (\alpha_1-\alpha_2) & (\alpha_1-\alpha_3) & \ldots & (\alpha_1-\alpha_n) \\ f'(\alpha_2) = & (\alpha_2-\alpha_1) & a_n & (\alpha_2-\alpha_3) & \ldots & (\alpha_2-\alpha_n) \\ f'(\alpha_3) = & (\alpha_3-\alpha_1) & (\alpha_3-\alpha_2) & a_n & \ldots & (\alpha_3-\alpha_n) \\ & \ldots & \ldots & & & \ldots \end{array}$$

folglich*)

$$f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n{}^n \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$$

Ebendaher findet man für $m < n$

$$f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} a_n{}^m \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 P$$

wenn $P$ das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ von den Grössen (Subtrahenden) $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ bedeutet.

**Beispiel.** Wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die $n$ten Wurzeln von 1 sind, so ist

$$f(x) = x^n - 1, \quad f'(x) = nx^{n-1}, \quad \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^{n-1}$$

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} n^n$$

Und wenn $\alpha_n = 1$, so hat man

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^2 = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2}{f'(\alpha_n)^2} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} n^{n-2}$$

**8.** In der Determinante $n$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1{}^{n-2} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n{}^{n-2} & u_n \end{vmatrix}$$

hat das Element $u_i$ die Adjuncte

$$(-1)^{n-i} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

wie sich ergiebt, indem man [illegible]te Zeile zur Schlusszeile macht (§. 2, 3). Nach der angegebenen Bezeichnung ist

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 485.

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{(\alpha_i - \alpha_1) \ldots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \ldots (\alpha_n - \alpha_i)}$$

Bildet man nun

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)$$

$$f'(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1) \ldots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \ldots (\alpha_i - \alpha_n)$$

so findet man

$$(-1)^{n-i} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{f'(\alpha_i)}$$

und daher folgende Entwickelung der gegebenen Determinante

$$P = \left(\frac{u_1}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)}\right) \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

9. Bezeichnet man durch $P_r$ die Determinante, in welche $P$ (8) übergeht, wenn $\alpha_i^r$ an die Stelle von $u_i$ tritt, so ist für beliebige $r$ *)

$$\frac{\alpha_1^r}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\alpha_n^r}{f'(\alpha_n)} = \frac{P_r}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

Die Determinante $P_r$ ist null, wenn die letzte Colonne mit einer der übrigen Colonnen übereinstimmt. Also verschwindet die Summe der Quotienten für $r = 0, 1, \ldots, n-2$.

Die Determinante $P_r$ geht in das Product $\Delta$ über, wenn $r = n - 1$. Also hat für $r = n - 1$ die Summe den Werth 1.

Die Determinante $P_r$ ist für $r = n - 1, n, n + 1, \ldots$ eine ganze alternirende Function von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, mithin durch das Product $\Delta$ theilbar (2). Also ist für ganze $r > n - 1$ die betrachtete Summe eine symmetrische ganze Function $Q_r$ der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $r - n + 1$ Dimensionen.

Wenn nun $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ ist, so findet man aus

$$\begin{aligned} & a_0 \left(\frac{1}{f'(\alpha_1)} + \frac{1}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{1}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + & a_1 \left(\frac{\alpha_1}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\alpha_n}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + & a_1 \left(\frac{\alpha_1^2}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^2}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + & \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

---

*) Cauchy l. c. p. 497.

durch Addition der Colonnen die Summe

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

und durch Addition der Zeilen den Werth dieser Summe, der null ist, wenn $\varphi(x)$ $(n-2)$ten oder niedern Grades, der aber

$$a_n + a_{n+1} Q_{n+1} + \ldots$$

beträgt, wenn $\varphi(x)$ höhern Grades ist*).

Nach dem von EULER (Calc. diff. II, 407) formulirten Fundamentalsatz über die gebrochenen Functionen ist

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1 : f'(\alpha_1)}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{1 : f'(\alpha_n)}{z - \alpha_n}$$

Nun ist

$$\frac{1}{z - \alpha} = \frac{1}{z} \Sigma \left(\frac{\alpha}{z}\right)^h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots)$$

Also ergiebt sich in der Entwickelung der identischen Ausdrücke nach fallenden Potenzen von $z$ als Coefficient von $z^{-r-1}$ einerseits

$$\frac{\alpha_1^{\,r}}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\alpha_n^{\,r}}{f'(\alpha_n)} \text{ d. i. } Q_r$$

andrerseits (EULER Introd. I, 270)

$$\Sigma \alpha_1^{\,h} \alpha_2^{\,i} \ldots \qquad \left(\begin{matrix} h, i, \ldots = 0, 1, 2, \ldots \\ h + i + \ldots = r + 1 - n \end{matrix}\right)$$

so dass die Summe der Producte von je $r + 1 - n$ gleichen oder ungleichen Factoren der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ den Werth $Q_r$ ausdrückt**).

**10.** Durch Entwickelung der Determinante (1)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_1^{\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \cdot & \cdot & \alpha_n^{\,n-1} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der $i$ten Zeile erhält man

*) Den ersten Theil dieses Satzes hatte EULER Calc. integr. II §. 1169 gegeben. Zwei allgemeinere Sätze hat BRIOSCHI Crelle J. 50 p. 239 hinzugefügt. Der Satz wurde von JACOBI Crelle J. 14 p. 281 auf Functionen von 2 Variablen ausgedehnt. Die Werthe $P_r$ und $Q_r$ für negative ganze $r$, sowie die Determinante eines Systems, dessen Zeilen Potenzen der $\alpha$ mit beliebig gegebenen ganzen Exponenten enthalten, sind von NAEGELSBACH Programm Zweibrücken 1871 untersucht worden.

**) JACOBI Disq. de fract. simpl. 1825 p. 5.

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \delta_{i1} + \delta_{i2}\alpha_i + \ldots + \delta_{in}\alpha_i^{n-1}$$

Denselben Werth hat (8)

$$(-1)^{n-i} f'(\alpha_i)\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

Nun ist

$$f'(\alpha_i) = \alpha_i^{n-1} + C_{i1}\alpha_i^{n-2} + C_{i2}\alpha_i^{n-3} + \ldots$$

wenn man durch $C_{ik}$ die mit dem Zeichen $(-1)^k$ versehene Summe der Producte von $k$ verschiedenen Grössen der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$, $\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet. Daher hat man die Identität

$$\delta_{ik} = (-1)^{n-i} C_{i,n-k}\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

$$\frac{\delta_{ik}}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \frac{C_{i,n-k}}{f'(\alpha_i)}$$

11. Aus dem linearen System

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_1^{n-1} = u_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2\alpha_n + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = u_n \end{array}$$

findet man nach §. 8, 1

$$x_k\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = u_1\delta_{1k} + \ldots + u_n\delta_{nk}$$

mithin (10)

$$x_k = \frac{u_1}{f'(\alpha_1)} C_{1,n-k} + \ldots + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)} C_{n,n-k}$$

Wenn man zu dem gegebenen System die Gleichung

$$x_1 + x_2 z + \ldots + x_n z^{n-1} = \varphi(z)$$

hinzufügt, so erhält man (§. 8, 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} & u_n \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^{n-1} & \varphi(z) \end{vmatrix} = 0 .$$

In dieser Determinante hat $\varphi(z)$ den Coefficienten $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $u_i$ den Coefficienten $-\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, z, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Nun ist

$$\frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, z, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n, z)}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_i)}$$

und nach der obigen Bezeichnung (8)

$$= \frac{f(z)}{(z-\alpha_i) f'(\alpha_i)}$$

folglich hat man*)

$$\varphi(z) = \frac{u_1}{f'(\alpha_1)}\,\frac{f(z)}{z-\alpha_1} + \ldots + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)}\,\frac{f(z)}{z-\alpha_n}$$

zur Berechnung der Function $(n-1)$ten Grades, welche entsprechend den Werthen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Variablen die Werthe $u_1, \ldots, u_n$ annimmt. Die Unbekannte $x_k$ ist der Coefficient von $z^{k-1}$ in $\varphi(z)$, und erhält den oben angegebenen Werth, wenn man

$$\frac{f(z)}{z-\alpha_i} = z^{n-1} + C_{i1} z^{n-2} + \ldots$$

entwickelt (10).

12. Aus dem linearen System

$$\begin{array}{lllll} x_1 & + \ldots + & x_n & = & 1 \\ x_1 \alpha_1 & + \ldots + & x_n \alpha_n & = & t \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_1 \alpha_1^{n-1} & + \ldots + & x_n \alpha_n^{n-1} & = & t^{n-1} \end{array}$$

erhält man (§. 8, 1)

$$x_i \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \alpha_{i-1} & t & \alpha_{i+1} & \ldots \\ \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \ldots & \alpha_{i-1}^{n-1} & t^{n-1} & \alpha_{i+1}^{n-1} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$x_i \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta(\ldots, \alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \ldots)$$

Setzt man beiderseits das $i$te Element ans Ende, so bleibt übrig **)

$$x_i = \frac{f(t)}{(t-\alpha_i)\, f'(\alpha_i)}$$

13. Aus dem allgemeinern linearen System

$$\begin{array}{lllll} x_1 & + \ldots + & x_n & = & u_1 \\ x_1 \alpha_1 & + \ldots + & x_n \alpha_n & = & u_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_1 \alpha_1^{n-1} & + \ldots + & x_n \alpha_n^{n-1} & = & u_n \end{array}$$

findet man nach der angenommenen Bezeichnung (10)

---

*) Lagrange's Interpolationsformel (1795) J. de l'éc. polyt. Cah. 7—8 p. 417, welche von dem Fundamentalsatz über die gebrochenen Functionen sich nicht unterscheidet.

**) Lagrange Mém. de Berlin 1775 p. 185. Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 78.

$$x_i \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = u_1 \delta_{i1} + \ldots + u_n \delta_{in}$$
$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 C_{i,n-1} + u_2 C_{i,n-2} + \ldots \text{*)}$$

In der That ist

$$C_{i,n-1} + C_{i,n-2} z + C_{i,n-3} z^2 + \ldots = \frac{f(z)}{z-\alpha_i}$$

eine Function, welche bei $z = \alpha_i$ auf $f'(\alpha_i)$ sich reducirt und die bei den andern Werthen von $z$ aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ verschwindet.

Anstatt der Grössen $C_{i,n-1}, C_{i,n-2}, \ldots$ findet man, wenn

$$f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_{n-1} z + C_n$$

gegeben ist, andre Ausdrücke auf folgendem Wege**). Man bilde die Functionen

$$f_1(z) = z + C_1$$
$$f_2(z) = z^2 + C_1 z + C_2$$
$$f_3(z) = z^3 + C_1 z^2 + C_2 z + C_3$$

u. s. w. Dann hat man, weil $z^k - t^k$ durch $z - t$ theilbar ist,

$$\frac{f(z) - f(t)}{z-t} = f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + \ldots + t^{n-1}$$

und insbesondere, weil $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, .. verschwinden,

$$\frac{f(z)}{z-\alpha_1} = f_{n-1}(z) + \alpha_1 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_1^{n-1}$$
$$\frac{f(z)}{z-\alpha_2} = f_{n-1}(z) + \alpha_2 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_2^{n-1}$$

u. s. w. Aus diesem System erhält man vermöge der gegebenen Gleichungen

$$f(z) \left\{ \frac{x_1}{z-\alpha_1} + \frac{x_2}{z-\alpha_2} + \ldots + \frac{x_n}{z-\alpha_n} \right\}$$
$$= u_1 f_{n-1}(z) + u_2 f_{n-2}(z) + \ldots + u_n$$

Demnach erscheinen $x_1, x_2, \ldots$ als die Zähler der Partialbrüche, in welche man die gebrochene Function

$$\frac{u_1 f_{n-1}(z) + u_2 f_{n-2}(z) + \ldots + u_n}{f(z)}$$

zerlegen kann. Für $z = \alpha_i$ bleibt übrig

---

*) Cauchy Anal. algébr. III, 1. Vergl. Lagrange Mém. de Berlin 1771 Réflexions art. 100.

**) Lagrange Mém. de Berlin 1792 p. 248. Vergl. Scheibner Leipziger Berichte 1856 p. 65.

$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 f_{n-1}(\alpha_i) + u_2 f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + u_n$$

Hiernach sind die Ausdrücke $f_1(\alpha_i)$, $f_2(\alpha_i)$, .. gleichbedeutend mit den oben gegebenen $C_{i1}$, $C_{i2}$, .., und enthalten die Grösse $\alpha_i$ nicht, wie man bei ihrer Bildung bestätigt findet.

Wenn insbesondere $u_1 = 1$, $u_2 = t$, $u_3 = t^2$, .. ist, so wird

$$f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

$$f_{n-1}(\alpha_i) + t f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(t)}{t - \alpha_i}$$

in Uebereinstimmung mit (12).

14. Eine binäre Form $(2n-1)$ten Grades (eine homogene ganze Function der Variablen $x$ und $y$) kann durch $n$ Glieder, $(2n-1)$te Potenzen binärer Formen ersten Grades, ausgedrückt werden*). Denn die Form

$$a_0 x^{2n-1} + a_1 \binom{2n-1}{1} x^{2n-2} y + \ldots + a_{2n-1} y^{2n-1}$$

wird durch

$$b_1 (x + \alpha_1 y)^{2n-1} + b_2 (x + \alpha_2 y)^{2n-1} + \ldots + b_n (x + \alpha_n y)^{2n-1}$$

ausgedrückt, wenn die Coefficienten der Potenzen von $x$ der Reihe nach mit den gegebenen Coefficienten übereinstimmen, wenn also $2n$ Functionen der Unbekannten $b_1$, .., $b_n$, $\alpha_1$, .., $\alpha_n$ ebensoviel gegebene Werthe $a_0$, .., $a_{2n-1}$ haben. Dagegen würde bei der analogen Darstellung einer binären Form $2n$ten Grades durch $2n$te Potenzen die Anzahl der Unbekannten von der Anzahl der für sie aufzustellenden Gleichungen verschieden sein.

Die verlangte Transformation erfolgt unter den Bedingungen

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_1 + \ldots + b_n \\
a_1 &= b_1 \alpha_2 + \ldots + b_n \alpha_n \\
a_2 &= b_1 \alpha_1^2 + \ldots + b_n \alpha_n^2 \\
&\ldots \\
a_{2n-1} &= b_1 \alpha_1^{2n-1} + \ldots + b_n \alpha_n^{2n-1}
\end{aligned}$$

Um denselben zu genügen, bildet man die Function

---

*) Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 391) hat diese Transformation gezeigt und den gesuchten Ausdruck den canonischen genannt. Ueber den canonischen Ausdruck einer binären Form geraden Grades hat Sylvester a. a. O. und Cambr. and Dublin math. J. 9 p. 93 Untersuchungen mitgetheilt. Vergl. Cayley Crelle J. 54 p. 48.

$$f(z) = (z-\alpha_1)\,..\,(z-\alpha_n) = C_n + C_{n-1}z + \cdots + C_1 z^{n-1} + z^n$$

welche verschwindet, wenn $z$ einen der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, ..$ annimmt, und demgemäss aus der 1ten, 2ten, .. Bedingung, indem man jedesmal die $n$ folgenden Bedingungen hinzuzieht, das System von Gleichungen

$$\begin{array}{l} C_n a_0 + C_{n-1} a_1 + \cdots + C_1 a_{n-1} + a_n = 0 \\ C_n a_1 + C_{n-1} a_2 + \cdots + C_1 a_n + a_{n+1} = 0 \\ \cdots \\ C_n a_{n-1} + C_{n-1} a_n + \cdots + C_1 a_{2n-2} + a_{2n-1} = 0 \end{array}$$

Daher ist nun

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & .. & a_n \\ . & . & .. & . \\ a_{n-1} & a_n & .. & a_{2n-1} \\ 1 & z & .. & z^n - f(z) \end{vmatrix} = 0$$

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & .. & a_n \\ . & . & .. & . \\ a_{n-1} & a_n & .. & a_{2n-1} \\ 1 & z & .. & z^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & .. & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & .. & a_n & z \\ . & .. & . & . \\ a_n & .. & a_{2n-1} & z^n \end{vmatrix} = Af(z)$$

also sind $\alpha_1, .., \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $R = 0$. Diese Gleichung gehört zu den oben (5) betrachteten. Die Grössen $b_1, .., b_n$ werden dann aus den ersten $n$ Bedingungen gefunden (13), und zwar ohne Unbestimmtheit, wenn die Wurzeln $\alpha_1, .., \alpha_n$ endlich und von einander verschieden sind.

15. Wenn die ganze Function $\varphi(t_1, .. t_n)$ in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigt, und wenn

$$f(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\,..\,(z-\alpha_n)$$

so findet man durch wiederholte Anwendung von LAGRANGE's Interpolationsformel (11)

$$\frac{\varphi(t_1, ..)}{f(t_1)} = \sum_h \frac{\varphi(\alpha_h, ..)}{f'(\alpha_h)(t_1-\alpha_h)}$$

$$\frac{\varphi(\alpha_h, t_2, ..)}{f(t_2)} = \sum_i \frac{\varphi(\alpha_h, \alpha_i, ..)}{f'(\alpha_i)(t_2-\alpha_i)}$$

$$\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1)\,..\,f(t_n)} = \sum_{h,i,..,p} \frac{\varphi(\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p)}{f'(\alpha_h)\,..\,f'(\alpha_p)(t_1-\alpha_h)\,..\,(t_n-\alpha_p)}$$

eine Summe von $n^n$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $h, i, .., p$ alle Zahlen von 1 bis $n$ setzt.

Wenn insbesondere die Function $\varphi$ alternirend ist, mithin zu $\Delta(t_1, .., t_n)$ ein constantes Verhältniss hat (2), so verschwindet jedes Glied der Summe, in welchem die Nummern $h, i, .., p$ nicht alle von einander verschieden sind, und man hat für $h, i, .., p$ nur die Permutationen von $1, 2, .., n$ zu setzen. Dabei ist (7)

$$f'(\alpha_h)\, f'(\alpha_i) \,..\, f'(\alpha_p) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)^2$$

und der Quotient $\Delta(\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p) : \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$ hat den Werth 1 oder $-1$, je nachdem die Reihe $h, i, .., p$ mit $1, 2, .., n$ zu derselben Classe von Permutationen gehört oder nicht. Daher bilden die Glieder der Summe eine Determinante $n$ten Grades, und man hat*)

$$\frac{\Delta(t_1, .., t_n)\, \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Sigma \pm \frac{1}{t_1 - \alpha_1} \cdot\cdot \frac{1}{t_n - \alpha_n}$$

Anmerkung. Entwickelt man den Quotienten

$$\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}$$

nach fallenden Potenzen von $t_1, .., t_n$, und bezeichnet man den Coefficienten von $(t_1, t_2 \,..\, t_n)^{-1}$ durch

$$\left[\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}\right]_{(t_1 \,..\, t_n)^{-1}},$$

so erhält man auch in dem Falle, dass die Function $\varphi$ in Bezug auf die einzelnen Variablen den $(n-1)$ten Grad übersteigt,

$$\left[\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}\right]_{(t_1 \,..\, t_n)^{-1}} = \Sigma \frac{\varphi(\alpha_h, .., \alpha_p)}{f'(\alpha_h) \,..\, f'(\alpha_p)}$$

also insbesondere

$$\left[\frac{\Delta(t_1, .., t_n)\, \psi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}\right]_{(t_1 \,..\, t_n)^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Sigma \frac{\psi(\alpha_1, .., \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)} \text{**)}$$

$$\left[\frac{\Delta(t_1, .., t_n)^2 f'(t_1) \,..\, f'(t_n)\, t_1^{m_1} \,..\, t_n^{m_n}}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}\right]_{(t_1 \,..\, t_n)^{-1}}$$

$$= \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)^2\, \Sigma \alpha_1^{m_1} \,..\, \alpha_n^{m_n} \text{***)}$$

*) Cauchy (Exerc. d'anal. 2 p. 154) hat diesen Satz gefunden und durch die im folgenden Artikel mitgetheilte Betrachtung bewiesen.

**) Jacobi Crelle J. 22 p. 368. ***) Betti Crelle J. 54 p. 98.

Die Glieder dieser beiden Summen werden aus den Permutationen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gebildet.

16. Dass die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - \alpha_1} & \cdot\ \cdot & \frac{1}{t_1 - \alpha_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{1}{t_n - \alpha_1} & \cdot\ \cdot & \frac{1}{t_n - \alpha_n} \end{vmatrix}$$

den angegebenen Werth (15)

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{\Delta(t_1, \ldots, t_n)\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{f(t_1)\ldots f(t_n)}$$

besitzt, wird durch folgende Betrachtung erkannt. Wenn man die Zeilen der Determinante $C$ der Reihe nach mit $f(t_1)$, $f(t_2)$, .. multiplicirt, so erhält man

$$C f(t_1) \ldots f(t_n) = \Sigma \pm \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \cdots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n}$$

eine ganze alternirende Function (2) sowohl von $t_1, \ldots, t_n$, als auch von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, und theilbar durch $\Delta(t_1, \ldots, t_n)\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Der Quotient ist eine von den Grössen $t_1, \ldots, t_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ unabhängige Zahl, welche sich dadurch ermitteln lässt, dass man den Grössen $t_1, \ldots, t_n$ der Reihe nach die Werthe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zuertheilt. In diesem Falle verschwinden alle die Elemente der Determinante, welche neben der Diagonale stehn; daher bleibt von der Determinante nur ihr Anfangsglied übrig, welches in

$$f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$$

übergeht (7). Also ist

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

der gesuchte Quotient.

17. Die Adjuncte $\gamma_{ik}$ des Elements $\frac{1}{t_i - \alpha_k}$ entsteht aus der Determinante $C$ (16) durch Weglassung von $t_i$ und $\alpha_k$ in den Reihen $t_1, \ldots, t_n$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und durch Multiplication mit $(-1)^{i+k}$. Daher hat man $\gamma_{ik}$

$$= (-1)^{i+k}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \frac{\Delta(\ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots)\,\Delta(\ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots)}{\frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_k} \cdots \frac{f(t_{i-1})}{t_{i-1} - \alpha_k}\,\frac{f(t_{i+1})}{t_{i+1} - \alpha_k} \cdots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_k}}$$

Indem man noch die Function

$$g(z) = (z - t_1)(z - t_2) \ldots (z - t_n)$$

bildet, findet man (8)

$$\Delta(\ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots)\,\Delta(\ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots) = (-1)^{i+k} \frac{\Delta(t_1, \ldots)\,\Delta(\alpha_1, \ldots)}{g'(t_i)\,f'(\alpha_k)}$$

$$(t_1 - \alpha_k) \ldots (t_{i-1} - \alpha_k)(t_{i+1} - \alpha_k) \ldots (t_n - \alpha_k) = (-1)^{n-1} \frac{g(\alpha_k)}{\alpha_k - t_i}$$

und mit Hülfe dieser Werthe

$$\gamma_{ik} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{\Delta(t_1, \ldots)\,\Delta(\alpha_1, \ldots)}{f(t_1) \ldots f(t_n)} \frac{f(t_i)\,g(\alpha_k)}{g'(t_i)\,f'(\alpha_k)} \frac{1}{\alpha_k - t_i}$$

$$\frac{\gamma_{ik}}{C} = -\frac{f(t_i)}{g'(t_i)} \frac{g(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} \frac{1}{t_i - \alpha_k}.$$

18. Aus dem linearen System

$$\frac{x_1}{t_1 - \alpha_1} + \cdots + \frac{x_n}{t_1 - \alpha_n} = u_1$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\frac{x_1}{t_n - \alpha_1} + \cdots + \frac{x_n}{t_n - \alpha_n} = u_n$$

findet man nach §. 8, 1

$$Cx_k = u_1\gamma_{1k} + \cdots + u_n\gamma_{nk}$$

mithin (17)

$$x_k = -\frac{g(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} \left\{ \frac{f(t_1)}{g'(t_1)} \frac{u_1}{t_1 - \alpha_k} + \cdots + \frac{f(t_n)}{g'(t_n)} \frac{u_n}{t_n - \alpha_k} \right\} {}^{*)}$$

Anmerkung. Der besondere Fall, in welchem alle Zeilen und Colonnen des Systems

$$\begin{matrix} \frac{1}{t_1 - \alpha_1} & \cdots & \frac{1}{t_1 - \alpha_n} & u_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \\ \frac{1}{t_n - \alpha_1} & \cdots & \frac{1}{t_n - \alpha_n} & u_n \end{matrix}$$

harmonische Reihen sind, kommt in der Theorie der approximativen Quadraturen vor (Gauss 1814 Comm. Gött. Tom. 3.

*) Hädenkamp Crelle J. 22 p. 184. 25 p. 182. Liouville J. 11 p. 466. Hermite Crelle J. 52 p. 43.

Vergl. JACOBI Crelle J. 1 p. 301, SCHELLBACH Crelle J. 16 p. 192, SCHEIBNER Leipz. Berichte 1856 p. 73, u. A.) und ist von JOACHIMSTHAL Crelle J. 48 p. 411 neu behandelt worden. Vergl. auch LIGOWSKI Grunert Archiv 36 p. 181.

**19.** Wenn man die Determinante (16 ff.)

$$C = \frac{\gamma_{i1}}{t_i - \alpha_1} + \cdot \cdot + \frac{\gamma_{in}}{t_i - \alpha_n}$$

nach $t_i$ differentiirt, so erhält man eine neue Determinante, welche von $C$ dadurch sich unterscheidet, dass die Elemente der $i$ten Zeile

$$\frac{-1}{(t_i - \alpha_1)^2}, \ldots, \frac{-1}{(t_i - \alpha_n)^2}$$

sind (§. 3, 15). Daher ist*)

$$(-1)^n \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \cdot \cdot \partial t_n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2} & \cdot \cdot & \frac{1}{(t_1 - \alpha_n)^2} \\ \cdot & \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(t_n - \alpha_1)^2} & \cdot \cdot & \frac{1}{(t_n - \alpha_n)^2} \end{vmatrix} = B$$

**20.** Wenn man die Determinante $B$ durch die Determinante $C$ dividirt, so erhält man

$$\frac{B}{C} = \Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h)(t_2 - \alpha_i) \, . \, . \, (t_n - \alpha_p)}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für $h, i, \ldots, p$ alle Permutationen der Nummern $1, 2, \ldots, n$ setzt**).

**Beweis.** Das Product

$$B f(t_1)^2 \, . \, . \, f(t_n)^2 = \Sigma \pm \left\{ \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \, . \, . \, \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n} \right\}^2$$

ist eine ganze alternirende Function sowohl von $t_1, \ldots, t_n$, als auch von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, und theilbar durch $\Delta(t_1, \ldots, t_n)\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Der Quotient ist eine symmetrische Function $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$, welche in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ten Grad erreicht und daher (15) durch

*) BORCHARDT Berl. Monatsbericht 1855 p. 165 und Crelle J. 53 p. 193.

**) BORCHARDT a. a. O. Vergl. JOACHIMSTHAL Crelle J. 53 p. 166.

$$f(t_1)\,.\,.\,f(t_n)\,\Sigma\frac{\varphi(\alpha_h,\,.\,.\,,\alpha_p)}{f'(\alpha_h)\,.\,.\,f'(\alpha_p)(t_1-\alpha_h)\,.\,.\,(t_n-\alpha_p)}$$

dargestellt werden kann.

Wenn nun $t_1, t_2, .., t_n$ der Reihe nach die Werthe $\alpha_h$, $\alpha_i, .., \alpha_p$ erhalten, welche nicht alle von einander verschieden sind, so verschwindet

$$\frac{Bf(t_1)^2\,.\,.\,f(t_n)^2}{\varDelta(t_1,\,.\,.)\,\varDelta(\alpha_1,\,.\,.)}$$

weil nicht nur $B$, sondern auch $\frac{f(t_1)^2}{t_2-t_1}$ verschwindet, während z. B. $t_1$ und $t_2$ mit $\alpha_h$ zusammenfallen. Also findet man alle nicht verschwindenden Glieder der Summe, indem man für $h, i, .., p$ alle Permutationen der Nummern $1, 2, .., n$ setzt. Wenn aber $t_1, t_2, .., t_n$ der Reihe nach die von einander verschiedenen Werthe $\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p$ erhalten, so bleibt von der Determinante

$$\Sigma\pm\left\{\frac{f(t_1)}{t_1-\alpha_1}\,.\,.\,\frac{f(t_n)}{t_n-\alpha_n}\right\}^2$$

nur ein Glied $\varepsilon\,[f'(\alpha_h)\,f'(\alpha_i)\,.\,.\,f'(\alpha_p)]^2$ übrig, während

$$\varDelta(\alpha_h,\,\alpha_i,\,.\,.\,,\,\alpha_p)\ \text{ in }\ \varepsilon\varDelta(\alpha_1,\,.\,.\,,\,\alpha_n)$$

übergeht. Daher ist

$$\varphi(\alpha_h,\alpha_i,..,\alpha_p)=\left\{\frac{f'(\alpha_h)\,.\,.\,f'(\alpha_p)}{\varDelta(\alpha_1,..,\alpha_n)}\right\}^2=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}f'(\alpha_h)\,.\,.\,f'(\alpha_p)$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{Bf(t_1)\,.\,.\,f(t_n)}{\varDelta(t_1,..)\,\varDelta(\alpha_1,..)}=\Sigma\frac{1}{(t_1-\alpha_h)\,.\,.\,(t_n-\alpha_p)}$$

Anmerkung. Nach (19) hat man die Identität

$$\Sigma\frac{1}{(t_1-\alpha_h)\,.\,.\,(t_n-\alpha_p)}=\frac{(-1)^n}{C}\frac{\partial^n C}{\partial t_1\,.\,.\,\partial t_n}$$

$$=(-1)^n\frac{f(t_1)\,.\,.\,f(t_n)}{\varDelta(t_1,\,.\,.\,,\,t_n)}\frac{\partial^n}{\partial t_1\,.\,.\,\partial t_n}\left\{\frac{\varDelta(t_1,\,.\,.\,,\,t_n)}{f(t_1)\,.\,.\,f(t_n)}\right\}$$

Der Differentialcoefficient (§. 3, 15) ist der Quotient einer alternirenden ganzen Function von $t_1, .., t_n$, dividirt durch $f(t_1)^2\,..\,f(t_n)^2$. Indem man denselben durch $\varDelta(t_1, .., t_n)$ dividirt und den Quotienten mit $f(t_1)\,..\,f(t_n)$ multiplicirt, erhält man die erzeugende Function aller ganzen symmetrischen Functionen von den Wurzeln der Gleichung $f(z)=0$. Denn die Entwickelung der Identität nach fallenden Potenzen von $t_1, .., t_n$ giebt einerseits die symmetrische Function der Wurzeln

$$\Sigma \alpha_h^{m_1} \alpha_i^{m_2} \ldots \alpha_p^{m_n}$$

andrerseits den Ausdruck derselben durch die Coefficienten der Gleichung, worüber man in der angeführten Abhandlung weitern Aufschluss findet.

21. Wenn $F_1(z), \ldots, F_m(z)$ ganze Functionen und $x_1, \ldots, x_m$ veränderliche Argumente sind, welche für $z$ gesetzt werden, so ist die Determinante $\Sigma \pm F_1(x_1) \ldots F_m(x_m)$ eine alternirende ganze Function der Argumente $x_1, \ldots, x_m$, mithin durch das Product der Differenzen $\Delta(x_1, \ldots, x_m)$ theilbar (2). Der Quotient kann unter der Voraussetzung $m < n$ und dass keine der Functionen den $(n-1)$ten Grad übersteigt, interpolatorisch aus den Werthen berechnet werden, welche die Functionen bei den gegebenen Werthen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Argumente annehmen. Bezeichnet man durch

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \quad x_1, \ldots, x_m)$$

das Product der $mn$ Differenzen, welche durch Subtraction aller Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von allen Grössen $x_1, \ldots, x_m$ entstehn, so ist

$$\frac{\Sigma \pm F_1(x_1) \ldots F_m(x_m)}{\Delta(x_1, \ldots, x_m)} = \Sigma \frac{\Sigma \pm F_1(\alpha_1) \ldots F_m(\alpha_m)\, D(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n; x_1, \ldots, x_m)}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\, D(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)}$$

eine Summe von $\binom{n}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ je $m$ verschiedene Grössen der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ setzt*).

**Beweis.** Bildet man $\varphi(z) = (z-\alpha_1) \ldots (z-\alpha_n)$, so ist (11)

$$\frac{F_i(x_k)}{\varphi(x_k)} = \frac{F_i(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)(x_k-\alpha_1)} + \ldots + \frac{F_i(\alpha_n)}{\varphi'(\alpha_n)(x_k-\alpha_n)}$$

und nach (§. 6, 1)

$$\Sigma \pm \frac{F_1(x_1)}{\varphi(x_1)} \ldots \frac{F_m(x_m)}{\varphi(x_m)} = \Sigma \left\{ \Sigma \pm \frac{F_1(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)} \ldots \frac{F_m(\alpha_m)}{\varphi'(\alpha_m)} \Sigma \pm \frac{1}{x_1-\alpha_1} \ldots \frac{1}{x_m-\alpha_m} \right\}$$

Nun ist (§. 3, 4)

$$\Sigma \pm \frac{F_1(x_1)}{\varphi(x_1)} \ldots \frac{F_m(x_m)}{\varphi(x_m)} = \frac{\Sigma \pm F_1(x_1) \ldots F_m(x_m)}{\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_m)}$$

---

*) BORCHARDT über eine Interpolationsformel. Abhandl. d. Berl. Acad. 1860 p. 1.

ferner (7)

$$\varphi'(\alpha_1)\,.\,.\,\varphi'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\,\Delta(\alpha_1,\,.\,.\,,\alpha_m)^2\, D(\alpha_{m+1},\,.\,.\,,\alpha_n;\,\alpha_1,\,.\,.\,,\alpha_m)$$

endlich (16)

$$\Sigma \pm \frac{1}{x_1-\alpha_1}\,.\,.\,\frac{1}{x_m-\alpha_m} = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\frac{\Delta(x_1,\,.\,.\,,x_m)\,\Delta(\alpha_1,\,.\,.\,,\alpha_m)}{D(\alpha_1,\,.\,.\,,\alpha_m;\,x_1,\,.\,.\,,x_m)}$$

$$\frac{\varphi(x_1)\,.\,.\,\varphi(x_m)}{D(\alpha_1,\,.\,.\,,\alpha_m;\,x_1,\,.\,.\,,x_m)} = D(\alpha_{m+1},\,.\,.\,,\alpha_n;\,x_1,\,.\,.\,,x_m)$$

Durch Einführung dieser Werthe erhält man sofort den zu beweisenden Ausdruck.

Die Anwendungen dieses Ausdrucks, namentlich auf die Reste, welche bei der Entwickelung des Quotienten einer ganzen Function $f(z)$ durch $\varphi(z)$ in einen Kettenbruch entstehn, und auf die Nenner der Näherungsbrüche für denselben Kettenbruch, findet man in der angeführten Abhandlung.

## §. 11. Norm, Resultante und Discriminante.

1. Wenn $\alpha$ eine eigentliche $n$te Wurzel der Einheit bedeutet, deren Potenzen $\alpha^2,\,.\,.\,,\alpha^{n-1}$ von 1 verschieden sind, so hat eine ganze Function derselben $n$ Glieder*), z. B.

$$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$$

Die $n$ conjugirten Werthe $\varphi(\alpha)$, welche den Werthen $\alpha$ entsprechen, sind die Wurzeln einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten von $\alpha$ unabhängig und ganze Functionen der Grössen $a$ sind.

Um $\varphi(\alpha)$ durch die Grössen $a$ zu bestimmen, bilde man durch Multiplication mit $\alpha$ unter der Voraussetzung $\alpha^n = 1$ das System von $n$ Gleichungen

$$\begin{array}{lllll}
0 = a_0 - \varphi(\alpha) & + & a_1\alpha + & a_2\alpha^2 + & .\,. \\
0 = a_{n-1} & + & (a_0 - \varphi(\alpha))\alpha + & a_1\alpha^2 + & .\,. \\
0 = a_{n-2} & + & a_{n-1}\alpha + & (a_0 - \varphi(\alpha))\alpha^2 + & .\,. \\
.\;.\;. & & .\;.\;. & .\;.\;. &
\end{array}$$

welches für die Grössen $1,\,\alpha,\,\alpha^2,\,.\,.$ homogen und ersten Grades ist. Nach §. 8, 2 ist

*) Vergl. Waring Misc. anal. 1762 p. 44, Euler 1764 (Nov. Comm. Petrop. 9 p. 70), Lagrange Réflexions . . 67 ff. (Mém. de Berlin 1771).

$$\begin{vmatrix} a_0 - \varphi(\alpha) & a_1 & \cdot\ \cdot & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 - \varphi(\alpha) & \cdot\ \cdot & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \cdot\ \cdot & a_0 - \varphi(\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

die gesuchte Gleichung $n$ten Grades für $\varphi(\alpha)$ mit den Wurzeln $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$, wenn die $n$ten Wurzeln von 1 durch $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet werden. Die Adjuncten einer Zeile bilden dann eine geometrische Progression, deren Verhältniss $\alpha$ ist. Wenn die erste derselben null ist, so sind alle Adjuncten null.

2. Das mit dem Zeichen $(-1)^n$ versehene Product der Wurzeln $\varphi(\alpha_1) \ldots \varphi(\alpha_n)$ wird gefunden, indem man das von $\varphi(\alpha)$ unabhängige Glied der Gleichung durch den Coefficienten von $[\varphi(\alpha)]^n$ dividirt. Daher wird das Product der $n$ conjugirten Werthe $\varphi(\alpha)$, welches die Norm der $n$deutigen Function $\varphi(\alpha)$ heisst, durch eine Determinante $n$ten Grades ausgedrückt*).

$$\mathrm{N}\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot\ \cdot & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdot\ \cdot & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \cdot\ \cdot & a_0 \end{vmatrix}$$

Von den $n^n$ Gliedern des Products bleiben nur die $n!$ Glieder der Determinante übrig.

Die Determinante ist durch $\varphi(\alpha_1)$, $\varphi(\alpha_2)$ .. theilbar. Denn die erste Colonne des Systems vermehrt um die mit $\alpha_1$, $\alpha_1^2$, .. multiplicirten folgenden Colonnen enthält die Elemente $\varphi(\alpha_1)$, $\alpha_1\varphi(\alpha_1)$, .. u. s. w.

Dasselbe Resultat kann man auf dem Wege ableiten, der im Folgenden (6) bei dem allgemeinern Problem angezeigt ist, indem man die Determinante (§. 10, 1)

---

*) Spottiswoode 1853 Crelle J. 51 p. 375. Dem daselbst gegebenen Ausdruck ist das Zeichen $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ hinzuzufügen. Vergl. Stern Crelle J. 73 p. 374. Die »Norm einer complexen Zahl« als das Product der Zahl mit der conjugirten Zahl hat Gauss 1831 eingeführt Theoria resid. biquadr. II §. 30. Das Zeichen N wird nach Dirichlet 1842 Crelle J. 24 p. 295 gebraucht. Die »Norm einer mehrdeutigen algebraischen Function« findet man bei Kummer de numeris complexis etc. Breslau 1844 (Liouv. J. 12 p. 187).

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_n) = \begin{vmatrix} \varphi(\alpha_1) & \alpha_1\varphi(\alpha_1) & \alpha_1^2\varphi(\alpha_1) & . \\ \varphi(\alpha_2) & \alpha_2\varphi(\alpha_2) & \alpha_2^2\varphi(\alpha_2) & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

in das Product

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . \\ a_{n-1} & a_0 & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 6, 1).

**3.** Die Determinante des Systems, dessen Zeilen durch cyclische Vertauschung aus der jedesmal vorhergehenden Zeile gebildet werden,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & . . & a_{n-2} \\ . & . & . . & . \\ a_1 & a_2 & . . & a_0 \end{vmatrix}$$

die Norm der $n$deutigen Function $\varphi(\alpha)$, hat die Eigenschaft, dass in jedem Glied der Determinante die Summe der Indices durch $n$ theilbar ist. Denn das $k$te Element der $i$ten Zeile hat den Index $-i+k$ oder $n-i+k$, je nachdem $i$ weniger oder mehr als $k$ beträgt. Wird nun ein Glied der Determinante aus dem $r$ten Element der 1ten Zeile, aus dem $s$ten Element der 2ten Zeile, aus dem $t$ten Element der 3ten Zeile, .. gebildet, so ist die Summe der Indices von

$$-1-2-3-\cdots+r+s+t+\cdots \text{ d. i. } 0$$

um $\lambda n$ verschieden, wo $\lambda$ eine Zahl der Reihe 0 bis $n-1$ bedeutet. Z. B. für $n=3$ hat man

$$\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\,\varphi(\alpha_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0a_1a_2$$

Die ganze Function $f(x)$ wird durch $A+Bx$, $C+Dx+Ex^2$, .. ausgedrückt, wenn durch $A$, $B$ ganze Functionen von $x^2$, durch $C$, $D$, $E$ ganze Functionen von $x^3$, u. s. w. bezeichnet werden. Daher ist

$$\mathrm{N}f(x\sqrt{1}) = f(-x)\,f(x) \text{ eine ganze Function von } x^2,$$
$$\mathrm{N}f(x\sqrt[3]{1}) = f(\alpha x)\,f(\alpha^2 x)\,f(x) \text{ eine ganze Function von } x^3, \text{ u. s. w.}$$

Umgekehrt wird die obige Determinante auf das Product zurückgeführt in Fällen, welche eine unmittelbare Angabe des Products zulassen. Z. B.

I. Wenn $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{n-1}$ den Werth 1 haben, so ist

$$\alpha_i + \alpha_i^2 + \cdots + \alpha_i^{n-1} + 1 = 0$$

$$\varphi(\alpha_1) = a_0 - 1, .., \quad \varphi(\alpha_{n-1}) = a_0 - 1, \quad \varphi(\alpha_n) = a_0 - 1 + n$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & . \\ 1 & a_0 & 1 & . \\ 1 & 1 & a_0 & \\ . & . & . & \end{vmatrix} = (a_0 - 1 + n)(a_0 - 1)^{n-1}$$

II. Wenn $a_0, a_1, a_2, ..$ eine geometrische Progression bilden, und zwar $a_0 = 1$, $a_1 = v$, u. s. w., so ist

$$\varphi(z) = \frac{1 - v^n}{1 - vz} .$$

Nun sind $1 - v\alpha_1$, $1 - v\alpha_2$, .. die Divisoren von $1 - v^n$, daher

$$\begin{vmatrix} 1 & v & v^2 & .. & v^{n-1} \\ v^{n-1} & 1 & v & .. & v^{n-2} \\ . & . & . & .. & . \\ v & v^2 & v^3 & .. & 1 \end{vmatrix} = (1 - v^n)^{n-1}$$

III. Wenn $a_2, a_3, ..$ verschwinden, so sind $a_0 + a_1\alpha_1$, $a_0 + a_1\alpha_2, ..$ die Divisoren von $a_0{}^n - (-a_1)^n$, daher

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & & \\ & a_0 & a_1 & & \\ & & . & . & \\ & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & & & & a_0 \end{vmatrix} = a_0{}^n - (-a_1)^n$$

4. Wenn die ganze Function

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = b_n(x - \beta_1) .. (x - \beta_n)$$

gegeben ist, und durch $x$ eine Wurzel der Gleichung $g(x) = 0$ bezeichnet wird, so hat die ganze Function

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = a_m(x - \alpha_1) .. (x - \alpha_m)$$

höchstens $n$ Glieder. Die $n$ conjugirten Werthe $f(x)$, welche den Werthen $x$ entsprechen, sind die Wurzeln einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten von $x$ unabhängig und ganze Functionen der Grössen $a$ und $b$ sind.

Um $f(x)$ durch die Grössen $a$ und $b$ zu bestimmen, bilde man durch Multiplication mit $x$ die $n$ Gleichungen

$$\begin{array}{lllll} 0 = & a_0 - f(x) + & a_1 x + & a_2 x^2 + & \cdots \\ 0 = & * & (a_0 - f(x))x + & a_1 x^2 + & \cdots \\ 0 = & * & * & (a_0 - f(x))x^2 + & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

und die $m$ Gleichungen

$$\begin{array}{lllll} 0 = & b_0 + & b_1 x + & b_2 x^2 + & \cdots \\ 0 = & * & b_0 x + & b_1 x^2 + & \cdots \\ 0 = & * & * & b_0 x^2 + & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & \end{array}$$

Dieses System von $n+m$ Gleichungen ist für die Grössen $1, x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ homogen und ersten Grades. Daher ist nach §. 8, 2

$$\begin{vmatrix} a_0 - f(x) & a_1 & a_2 & \cdots \\ & a_0 - f(x) & a_1 & \cdots \\ & & a_0 - f(x) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ & b_0 & b_1 & \cdots \\ & & b_0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

die gesuchte Gleichung $n$ten Grades für $f(x)$ mit den Wurzeln $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)$. Die Adjuncten einer Zeile bilden dann eine geometrische Progression, deren Verhältniss $x$ ist. Wenn die erste derselben null ist, so sind alle Adjuncten null.

Anmerkung. Die gefundene Gleichung trifft zusammen mit der nach Tschirnhausen*) zu bildenden Resolvente der Gleichung $g(x) = 0$. Dabei wird die Resolvente durch Verfügungen über die Coefficienten der Hülfsfunction $f(x)$ zu einer besondern; jeder Wurzel $f(x)$ der Resolvente entspricht eine bestimmte Wurzel $x$ der gegebenen Gleichung $g(x) = 0$, der Quotient der Adjuncten folgender Elemente einer Zeile, und zwar der nachfolgenden Adjuncte durch die vorhergehende.

---

*) Brief an Leibniz 1677 April 17 und Acta Erud. 1683 p. 204. Vergl. Lagrange Mém. de Berlin 1770. Réflexions .. 10 ff.

5. Das mit dem Zeichen $(-1)^n$ versehene Product der conjugirten Werthe $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)$ wird gefunden, indem man das von $f(x)$ unabhängige Glied $R$ der aufgestellten Gleichung durch den Coefficienten von $[f(x)]^n$ dividirt. Nun ist

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & & & \\ & a_0 & a_1 & . & . & . & & \\ & & a_0 & . & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & & & \\ & b_0 & b_1 & . & . & . & & \\ & & b_0 & . & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(n+m)$ten Grades, von welcher $n$ Zeilen aus den Coefficienten $a$ von $f(x)$ und die folgenden $m$ Zeilen aus den Coefficienten $b$ von $g(x)$ gebildet sind. Also ist

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = R$$

$$g(x) = 0, \quad \mathrm{N} f(x) = f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = R : b_n^m$$

Zugleich hat man nach der oben (§. 10, 21) angegebenen Bezeichnung

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = a_m^n b_n^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

$$= (-1)^{mn} a_m^n . b_n^m D(\beta_1, \ldots, \beta_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

$$= (-1)^{mn} a_m^n g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)$$

$$f(x) = 0, \quad \mathrm{N} g(x) = g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m) = (-1)^{mn} R : a_m^n$$

Hiernach ist das angegebene Product im Werthe $R$ eine symmetrische ganze Function sowohl der Wurzeln $\beta_1, \ldots, \beta_n$, als auch der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, und eine homogene ganze Function sowohl der Coefficienten $a_0, \ldots, a_m$ von $n$ Dimensionen, als auch der Coefficienten $b_0, \ldots, b_n$ von $m$ Dimensionen. Die Gleichung $R = 0$ ist die Bedingung, unter welcher eine Wurzel der für $f(x)$ aufgestellten Gleichung null ist, so dass die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ beide durch eine bestimmte Function von $x$ ersten Grades theilbar sind, und die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine Wurzel gemein haben. Daher ist die Gleichung $R = 0$ die Resultante des Systems von Gleichungen $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ (§. 8, 3), und die von $x$ unabhängige Determinante $R$ wird die Resultante der beiden ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ genannt.

Wenn die Coefficienten $a_m$, $a_{m-1}$, $a_{m-2}$, .. und $b_n$, $b_{n-1}$, $b_{n-2}$, .. homogene ganze Functionen der Variablen $y$, $z$ von 0, 1, 2, .. Dimensionen sind, so ist die Resultante $R$ eine homogene ganze Function von $mn$ Dimensionen derselben Variablen, und $R = 0$ eine Gleichung $mn$ten Grades für die Unbekannte $y : z$. Denn bei dem Uebergang von $y$ in $yt$, $z$ in $zt$ gehn

$$a_0, a_1, .., b_0, b_1, .., R$$

über in

$$a_0 t^m, a_1 t^{m-1}, .., b_0 t^n, b_1 t^{n-1}, .., R'$$

$$R' = \begin{vmatrix} a_0 t^m & a_1 t^{m-1} & . & . \\ & a_0 t^m & . & . \\ . & . & . & . \\ b_0 t^n & b_1 t^{n-1} & . & . \\ & b_0 t^n & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Wenn man die ersten $n$ Zeilen des veränderten Systems mit $t^{n-1}$, $t^{n-2}$, .. und die letzten $m$ Zeilen mit $t^{m-1}$, $t^{m-2}$, .. multiplicirt, dann die Colonnen durch $t^{m+n-1}$, $t^{m+n-2}$, .. dividirt, so findet man das anfängliche System. Nun ist

$$(n-1) + (n-2) + .. = \binom{n}{2}$$

u. s. w. Also ist $R' : R$ eine Potenz von $t$, deren Exponent

$$\binom{m+n}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2} = mn$$

Zu demselben Satz führt die Bemerkung, dass zugleich die Wurzeln $\alpha$ der Gleichung $f(x) = 0$ und die Wurzeln $\beta$ der Gleichung $g(x) = 0$ in $\alpha t$ und $\beta t$ übergehn. Demnach geht das Differenzenproduct $D$ über in $Dt^{mn}$.

Anmerkung. Die Aufstellung der Resultante von zwei algebraischen Gleichungen (aequatio finalis) ist von Euler (Mém. de Berlin 1748 p. 234) auf die Berechnung von symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichungen zurückgeführt worden. Zu demselben Zweck hat Lagrange (Mém. de Berlin 1769 p. 303) den Logarithmus von $R$ berechnet. Die Ableitung der Resultante aus einem linearen System ist gleichzeitig von Euler (Mém. de Berlin 1764 p. 96) und Bézout (Mém. de Paris 1764 p. 298) ange-

geben worden. Von dieser Ableitung ist SYLVESTER's dialytische Methode (Philos. Mag. 1840 no. 101. Vergl. RICHELOT Crelle J. 21 p. 226) und HESSE's Verfahren (Crelle J. 27 p. 1) nicht wesentlich verschieden.

6. Die Identität des Products $b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n)$ mit der Determinante $R$ (5) wird ohne Rücksicht auf die Gleichung (4) bestätigt, indem man wie oben (2) zeigt, dass $R$ durch $f(\beta_1)$ theilbar ist. U. s. w.

Zu demselben Ziele gelangt man*), indem man die Determinante

$$P = \begin{vmatrix} f(\beta_1) & \beta_1 f(\beta_1) & \cdot & \cdot & \beta_1^{n-1} f(\beta_1) & g(\beta_1) & \cdot & \cdot & \beta_1^{m-1} g(\beta_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\beta_n) & \beta_n f(\beta_n) & \cdot & \cdot & \beta_n^{n-1} f(\beta_n) & g(\beta_n) & \cdot & \cdot & \beta_n^{m-1} g(\beta_n) \\ f(\alpha_1) & \alpha_1 f(\alpha_1) & \cdot & \cdot & \alpha_1^{n-1} f(\alpha_1) & g(\alpha_1) & \cdot & \cdot & \alpha_1^{m-1} g(\alpha_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\alpha_m) & \alpha_m f(\alpha_m) & \cdot & \cdot & \alpha_m^{n-1} f(\alpha_m) & g(\alpha_m) & \cdot & \cdot & \alpha_m^{m-1} g(\alpha_m) \end{vmatrix}$$

in das Product von $R$ mit der Determinante

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \cdot & \cdot & \beta_1^{n+m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \beta_n & \cdot & \cdot & \beta_n^{n+m-1} \\ 1 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_1^{n+m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_m & \cdot & \cdot & \alpha_m^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 6, 1). Zufolge der Gleichungen

$$f(\alpha_1) = 0, \ldots, f(\alpha_m) = 0, \quad g(\beta_1) = 0, \ldots, g(\beta_n) = 0$$

ist aber (§. 4, 2 und §. 10, 1)

$$P = \begin{vmatrix} f(\beta_1) & \cdot & \cdot & \beta_1^{n-1} f(\beta_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\beta_n) & \cdot & \cdot & \beta_n^{n-1} f(\beta_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(\alpha_1) & \cdot & \cdot & \alpha_1^{m-1} g(\alpha_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g(\alpha_m) & \cdot & \cdot & \alpha_m^{m-1} g(\alpha_m) \end{vmatrix}$$
$$= f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m) \Delta(\beta_1, \ldots) \Delta(\alpha_1, \ldots)$$

Ferner ist identisch

*) BORCHARDT Crelle J. 57 p. 183. Vergl. HESSE krit. Zeitschr. f. Math. 1858 p. 483 und Tortolini Ann. di Matem. 1859 p. 5.

$$Q = \Delta(\beta_1, \ldots, \alpha_1, \ldots) = \frac{g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)}{b_n{}^m} \Delta(\alpha_1, \ldots) \Delta(\beta_1, \ldots)$$

folglich

$$b_n{}^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = R$$

7. Die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ ist die Resultante von $f(x)$ und $g(x) + \lambda f(x)$, wenn diese Function von demselben Grade ist als $g(x)$. Denn die Determinante $R$ bleibt unverändert, wenn man zu $m$ Zeilen des Systems der Reihe nach andre mit $\lambda$ multiplicirte Zeilen desselben addirt (§. 3, 7), zur $(n+1)$ten die 1te, zur $(n+2)$ten die 2te, u. s. w.

Die Resultante von $f(x)$ und $(x-t)\,g(x)$ ist das Product der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ mit der Resultante von $f(x)$ und $x-t$. Denn die gesuchte Resultante ist

$$b_n{}^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) f(t) = R f(t)$$

Wenn die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ beide durch dieselbe ganze Function $h(x)$ theilbar sind, so verschwindet ihre Resultante identisch. Z. B. $f(x)$ und $(x-\alpha_i)\,g(x)$ haben die Resultante $Rf(\alpha_i) = 0$.

8. Zwei ganze Functionen $f$, $g$ von $x$, deren Coefficienten $a$, $b$ gegeben oder gegebene Functionen einer Unbestimmten $y$ sind, haben im Allgemeinen keinen von $x$ abhängigen gemeinschaftlichen Divisor, d. h. eine ganze Function $h$ von $x$, durch welche $f$ theilbar ist, geht nicht unbedingt auf in $g$. Wenn aber bei einem bestimmten Werth $y$ die Functionen $f$, $g$ den gemeinschaftlichen Divisor $h$ haben, so bestimmt die Gleichung $h = 0$ den entsprechenden Werth $x$ ein- oder mehrdeutig, so dass $x$, $y$ dem System von Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ genügen.

Zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Divisor von $f$ und $g$, sowie der Auflösungen des Systems von Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ bilde man *), wenn z. B.

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$
$$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

aus $f$, $xf$, $x^2 f$ und aus $g$, $xg$, $x^2 g$, $x^3 g$

*) Vergl. 2te Auflage dieses Buchs 1864 p. 99 und den Aufsatz des Verf. Leipziger Berichte 1873 p. 530.

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ferner nach Weglassung von je einer Zeile

$$S = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 x & a_2 & a_3 & a_4 & \\ a_0 x & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 + b_1 x & b_2 & b_3 & & \\ b_0 x & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = S_0 + S_1 x$$

und nach Weglassung von je 2 Zeilen

$$T = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & a_3 & a_4 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 & b_3 & \\ b_0 x + b_1 x^2 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = T_0 + T_1 x + T_2 x^2$$

wobei $S_0$, $S_1$, $T_0$, $T_1$, $T_2$ Subdeterminanten des Systems sind, dessen Determinante $R$. Indem man zu den ersten Colonnen dieser Systeme die mit entsprechenden Potenzen von $x$ multiplicirten folgenden Colonnen addirt, erhält man die Ausdrücke

$$R = \begin{vmatrix} f & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & \\ xf & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ x^2 f & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ g & b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ xg & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ x^2 g & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ x^3 g & & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = Pf + Qg$$

$$S = \begin{vmatrix} f & a_2 & a_3 & a_4 & \\ xf & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ g & b_2 & b_3 & & \\ xg & b_1 & b_2 & b_3 & \\ x^2 g & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = P_1 f + Q_1 g$$

$$T = \begin{vmatrix} f & a_3 & a_4 \\ g & b_3 & \\ xg & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = P_2 f + Q_2 g$$

Diese Ausdrücke geben zu erkennen, dass jeder gemeinschaftliche Divisor von $f$ und $g$ in $R$, $S$, $T$ aufgeht. Wenn $R$ nicht null ist, so haben $f$ und $g$ keinen von $x$ abhängigen gemeinschaftlichen Divisor. Wenn $R = 0$, so haben $f$ und $g$ den gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades $S$, oder (wenn zugleich $S_1$ null ist) den gemeinschaftlichen Divisor zweiten Grades $T$. U. s. w. Die Coefficienten des gemeinschaftlichen Divisor sind homogene ganze Functionen der (gegebenen oder bestimmten) Coefficienten $a$, $b$.

Wenn $f = 0$ und $g = 0$, so ist auch $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$. Einem der Gleichung $R = 0$ genügenden Werth $y$ entspricht der den Gleichungen $S = 0$, $T = 0$ genügende Werth $x$, oder es entsprechen ihm die 2 der Gleichung $T = 0$ genügenden Werthe $x$, so dass $x, y$ dem System der Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ genügen. U. s. w.

In der That ist (5) $R = a_m{}^n b_n{}^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \ldots, \beta_n)$ nicht null, wenn $a_m = 0$ oder $b_n = 0$, weil dabei eine der Wurzeln $\alpha$ oder $\beta$ unendlich wird, sondern nur dann null, wenn unter den Differenzen $\beta_i - \alpha_k$ eine null ist, so dass $f$ und $g$ den Divisor $x - \beta_i$ gemein haben.

9. Wenn $f$, $g$, $\varphi$ gegebene ganze Functionen von $x$ sind, die erste $m$ten, die zweite $n$ten, die dritte $(m+n-1)$ten oder niedern Grades, und wenn $R$ die Resultante von $f$ und $g$ ist, so giebt es bestimmte Multiplicatoren $p$, $q$, Functionen von $x$, die erste $(n-1)$ten, die andre $(m-1)$ten Grades, dergestalt dass $R\varphi$ durch $pf + qg$ ausgedrückt wird*). Denn zufolge des Systems von $1 + n + m$ Zeilen

$$\begin{array}{rcccccccc}
\varphi & = & c_0 & + & c_1 x & + & c_2 x^2 & + & \cdots \\
f & = & a_0 & + & a_1 x & + & a_2 x^2 & + & \cdots \\
xf & = & & & a_0 x & + & a_1 x^2 & + & \cdots \\
x^2 f & = & & & & & a_0 x^2 & + & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
g & = & b_0 & + & b_1 x & + & b_2 x^2 & + & \cdots \\
xg & = & & & b_0 x & + & b_1 x^2 & + & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

---

*) Vergl. §. 8, 1. Jacobi Crelle J. 15 p. 108, Gauss (Demonstr. nova altera 8. Comm. Gött. III. 1815) hatte die Resultante der Function $f$ und ihres Differentialcoefficienten $f'$ durch $pf + qf'$ ausgedrückt.

ist identisch (§. 3, 6)

$$\begin{vmatrix} \varphi & c_0 & c_1 & c_2 & \cdot\cdot \\ f & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot\cdot \\ xf & & a_0 & a_1 & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & & & \cdot & \cdot\cdot \\ g & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot\cdot \\ xg & & b_0 & b_1 & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & & & \cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix} = 0$$

und durch Entwickelung nach den Elementen der ersten Colonne

$$R\varphi - pf - qg = 0$$

10. Wenn die ganzen Functionen $f$ und $g$ auf Grund der Gleichung $R = 0$ einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ eine oder mehrere gemeinschaftliche Wurzeln haben, so bestehn unter den Subdeterminanten des Systems, dessen Determinante $R$ ist, Relationen, weil die oben (8) gebildeten Determinanten, Functionen 1ten, 2ten, .. Grades einer gemeinschaftlichen Wurzel, null sind.

Wenn eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ durch $x$ bezeichnet wird, und wenn die Functionen $f$ und $g$ einen gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades haben, so verhalten sich (§. 8, 2) die Adjuncten einer Zeile des Systems von $(n + m)^2$ Elementen, dessen Determinante $R$ ist, wie $1 : x : x^2 : ..$ *).

Wenn $f$ und $g$ einen gemeinschaftlichen Divisor zweiten Grades haben, so verhalten sich die Adjuncten einer Zeile des verkürzten Systems von $(n + m - 2)^2$ Elementen, dessen Determinante $S$ ist, wie $1 : x^2 : x^3 : ...$ U. s. w.

Demnach findet man für die gemeinschaftliche Wurzel $x$ eine Gleichung entweder ersten oder zweiten oder höhern Grades.

11. Wenn die Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ eine oder zwei oder mehr gemeinschaftliche Wurzeln haben, so sind unter den 1ten, 2ten, .. Differentialcoefficienten der Resultante $R$ in Bezug auf die Variablen $a_0, a_1, a_2, ..$ oder $b_0, b_1, b_2, ..$ zwei oder drei oder mehr folgende durch eine homogene Gleichung ersten Grades verbunden.

---

*) Vergl. Jacobi Crelle J. 15 p. 106.

Aus der Identität (9) $R = Pf + Qg$ findet man

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = Px^i + \frac{\partial P}{\partial a_i} f + \frac{\partial Q}{\partial a_i} g$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} x - \frac{\partial R}{\partial a_{i+1}} = \left(\frac{\partial P}{\partial a_i} x - \frac{\partial P}{\partial a_{i+1}}\right) f + \left(\frac{\partial Q}{\partial a_i} x - \frac{\partial Q}{\partial a_{i+1}}\right) g$$

und auf demselben Wege

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_i^2} x^2 - 2 \frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial a_{i+1}} x + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i+1}^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial a_i^2} x^2 - 2 \frac{\partial^2 P}{\partial a_i \partial a_{i+1}} x + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i+1}^2}\right) f + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial a_i^2} x^2 - 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial a_i \partial a_{i+1}} x + \frac{\partial^2 Q}{\partial a_{i+1}^2}\right) g$$

u. s. w. Wenn nun $x$ eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ ist, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} x - \frac{\partial R}{\partial a_{i+1}} = 0 \text{*)}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_i^2} x^2 - 2 \frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial a_{i+1}} x + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i+1}^2} = 0$$

u. s. w., welchen eine gemeinschaftliche Wurzel $x$ genügt. In dem Falle, dass die erste Gleichung eine Identität ist, bestimmt die zweite Gleichung die beiden gemeinschaftlichen Wurzeln U. s. w.

12. Die Determinante $(n+m)$ten Grades

$$R = \left|\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . \\ . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . \\ . & . & . & . & . \end{array}\right|$$

kann durch Verbindung der Zeilen in eine Determinante $n$ten oder $m$ten Grades zusammengezogen werden, je nachdem $n$ oder $m$ die grössre der beiden Zahlen ist.

Es sei zunächst $m = n$. Um die $n$te Zeile des Systems zu transformiren, multiplicire man die $n$te Zeile mit $b_n$ und die vorangehenden Zeilen mit $b_{n-1}$, $b_{n-2}$, .., ebenso die $2n$te Zeile mit $a_n$ und die vorangehenden mit $a_{n-1}$, $a_{n-2}$, ... Durch Sub-

*) Richelot Crelle J. 21 p. 228.

traction der $2n$ten Zeile von der $n$ten, der $(2n-1)$ten Zeile von der $(n-1)$ten, .. bilde man nun unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

die Zeilen

$$\begin{array}{cccccccc} d_{01} & d_{11} & \cdot\;\cdot & d_{n-1,1} & d_{n1} & & & \\ & d_{02} & \cdot\;\cdot & d_{n-2,2} & d_{n-1,2} & d_{n2} & & \\ & & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & d_{0n} & d_{1n} & d_{2n} & \cdot\;\cdot & \end{array}$$

Die Addition dieser Zeilen ergiebt für die $n$te Zeile von $b_n R$ die Elemente

$$d_{01} \quad d_{02} \quad \cdot\;\cdot \quad d_{0n} \quad 0 \quad 0 \quad \cdot\;\cdot$$

weil $d_{ii} = 0$, $d_{ki} = -d_{ik}$, und daher die Summe

$$d_{i1} + d_{i-1,2} + \cdot\cdot + d_{1i} = 0$$

Auf dieselbe Weise transformirt man die $(n-1)$te, $(n-2)$te, .. Zeile. Man multiplicirt die $(n-i)$te Zeile mit $b_n$, die vorangehenden Zeilen mit $b_{n-1}$, $b_{n-2}$, .. u. s. w. und findet endlich die Elemente der $(n-i)$ten Zeile von $b_n{}^{i+1} R$ durch Addition der abgeleiteten Zeilen

$$\begin{array}{cccccccccc} d_{0,i+1} & d_{1,i+1} & \cdot\;\cdot & d_{n-i-1,i+1} & \cdot\;\cdot & d_{n,i+1} & & & \\ & d_{0,i+2} & \cdot\;\cdot & d_{n-i-2,i+2} & \cdot\;\cdot & d_{n-1,i+2} & d_{n,i+2} & & \\ & & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & d_{0n} & \cdot\;\cdot & d_{i+1,n} & d_{i+2,n} & \cdot\;\cdot & \end{array}$$

Bezeichnet man das $(k+1)$te Element der $(n-i)$ten Zeile durch $c_{ik}$, so hat man

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \cdot\cdot + d_{k,i+1}$$

Analog ist

$$c_{ki} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \cdot\cdot + d_{i,k+1} = c_{ik}$$

weil die Summe $d_{i+1,k} + d_{i,k+1} + \cdot\cdot + d_{k,i+1}$ identisch verschwindet. Insbesondere hat man

$$c_{i,n-1} = d_{in}, \qquad c_{in} = 0$$

weil $a_r$ und $b_r$ als verschwindend zu betrachten sind, wenn $r > n$.

Hiernach ist nun

$$b_n{}^n R = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & \cdot & \cdot & c_{n-1,n-1} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ c_{00} & \cdot & \cdot & c_{0,n-1} & & \\ b_0 & \cdot & \cdot & b_{n-1} & b_n & \\ & b_0 & \cdot & \cdot & b_{n-1} & b_n \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} .$$

Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm c_{00} \,.\,.\, c_{n-1,n-1}$ durch $S$, so ist (§. 4, 2) $b_n{}^n R$ das Product von $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} S$ mit einer Determinante $n$ten Grades, die von ihrem Anfangsglied $b_n{}^n$ sich nicht unterscheidet. Also ist*)

$$R = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} S$$

**Beispiele.** Wenn $f$ und $g$ vom 2ten Grade sind, so wird

$$R = - S = - \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} \\ d_{02} & d_{12} \end{vmatrix}$$

Wenn $f$ und $g$ vom 3ten Grade sind, so findet man

$$R = - S = - \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{13} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} \end{vmatrix}$$

Wenn $f$ und $g$ vom 4ten Gràde sind, so findet man

$$R = S = \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{04} + d_{13} & d_{14} \\ d_{03} & d_{04} + d_{13} & d_{14} + d_{23} & d_{24} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix}$$

Diese Determinanten können nach §. 5, 5 weiter entwickelt werden, wobei die Identität

$$d_{ik} d_{lm} + d_{kl} d_{im} + d_{li} d_{km} = 0$$

(§. 3, 9) zur Verfügung steht.

13. Wenn $m < n$, so bilde man durch Hinzufügung von $n - m$ Zeilen,

$$\begin{matrix} b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_n & & \\ & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_n & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

*) Vergl. unten (14).

welche auf der Diagonale endigen, die Determinante $2n$ten Grades $b_n^{n-m}R$, und verwandle dieselbe auf die angegebene Art (12) in eine Determinante $n$ten Grades, so dass

$$b_n^{n-m}R = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & . & . & c_{n-1,n-1} \\ . & . & . & . \\ c_{00} & . & . & c_{0,n-1} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist durch $b_n^{n-m}$ theilbar, als Product der beiden Determinanten $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . \\ & a_0 & a_1 & . \\ & & . & . \\ & & & . \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & . & . \\ . & . & . & . \\ c_{00} & c_{01} & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} & . & . & b_{m+1} & & \\ & b_n & . & . & b_{m+2} & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & & b_n & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & . \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Man findet nämlich durch Composition der ersten Colonne in der ersten Determinante mit den Colonnen der zweiten Determinante die erste Colonne des Products, u. s. w. In der That ist

$$a_0 b_{m+i+1} + \cdot \cdot + a_i b_{m+1} = d_{0,m+i+1} + \cdot \cdot + d_{i,m+1} = c_{mi}$$

weil $a_{m+1}, a_{m+2}, ..$ als verschwindend zu betrachten sind. Die zweite Determinante hat den Werth $b_n^{n-m}$, also ist $R$ der ersten Determinante gleich *).

14. Die abgekürzte Form der Resultante $R$ (12) ist von Bézout (Mém. de Paris 1764 p. 317) durch ein Verfahren erreicht worden, welches Jacobi (Crelle J. 15 p. 101. Vergl. Cauchy Exerc. d'Anal. 1840 p. 393) in Erinnerung gebracht und durch neue wesentliche Bemerkungen beleuchtet hat. Aus den gegebenen Functionen $f$ und $g$, welche beide als Functionen $n$ten Grades vorausgesetzt werden, bildet man mit Hülfe geeigneter Multiplicatoren $n$ bestimmte Functionen $(n-1)$ten Grades $u_0, u_1, .., u_{n-1}$, welche mit $f$ und $g$ zugleich verschwinden. Dann ergiebt sich die Resultante von $f$ und $g$ und der gemeinschaftliche Divisor dieser Functionen aus dem System der Gleichungen $u_0 = 0, .., u_{n-1} = 0$. Es ist nämlich

---

*) Vergl. Rosenhain Crelle J. 28 p. 268.

$$\begin{vmatrix} f & a_{r+1} + a_{r+2}x + \cdots \\ g & b_{r+1} + b_{r+2}x + \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r & a_{r+1} + a_{r+2}x + \cdots + a_n x^{n-r-1} \\ b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r & b_{r+1} + b_{r+2}x + \cdots + b_n x^{n-r-1} \end{vmatrix}$$

eine Function $(n-1)$ten Grades, welche durch

$$u_r = c_{r0} + c_{r1}x + \cdots + c_{r,n-1}x^{n-1}$$

bezeichnet wird. Unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

findet man (§. 3, 6)

$$c_{r0} = d_{0,r+1}, \quad c_{r1} = d_{0,r+2} + d_{1,r+1}, \quad c_{r2} = d_{0,r+3} + d_{1,r+2} + d_{2,r+1}, \ldots$$
$$c_{rs} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + \cdots + d_{s,r+1}$$

und analog

$$c_{sr} = d_{0,s+r+1} + d_{1,s+r} + \cdots + d_{r,s+1} = c_{rs} \text{*)}$$

weil die Summe $d_{s+1,r} + \cdots + d_{r,s+1}$ identisch verschwindet (12).

Eine gemeinschaftliche Wurzel $x$ der Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ genügt dem System $u_0 = 0, \ldots, u_{n-1} = 0$, weil diese letztern Functionen verschwinden, wenn $f$ und $g$ null werden. Wenn nun die Determinante $S = \Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1}$ null ist, so schliesst man wie oben (8), dass die Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel nicht haben. Wenn aber $S = 0$ und eine Subdeterminante $(n-1)$ten Grades nicht null ist, so bilden die Adjuncten einer Zeile eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel $x$ der Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ ist.

Wenn $\gamma_{ik}$ die Adjuncte des Elements $c_{ik}$ bezeichnet wird, so ist $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ (§. 3, 5), folglich

$$\gamma_{sr} : \gamma_{si} = x^r : x^i, \qquad \gamma_{is} : \gamma_{ik} = x^s : x^k$$

und durch Multiplication

$$\gamma_{rs} : \gamma_{ik} = x^{r+s} : x^{i+k}$$

Unter der Bedingung $i + k = r + s$ sind $\gamma_{ik}$ und $\gamma_{rs}$ einander gleich, und man kann ihren gemeinschaftlichen Werth durch $\gamma_{i+k}$ be-

*) Jacobi l. c. p. 102.

zeichnen. Demnach bilden die verschiedenen Adjuncten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n-2}$ eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f=0$ und $g=0$ ist.*)

Wenn aber $\gamma_0$ null ist, so bilde man nach Weglassung der Gleichung $u_0=0$ das System

$$\begin{matrix} c_{10} & +c_{11}x & c_{12} & \cdot\cdot & c_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n-1,0} & +c_{n-1,1}x & c_{n-1,2} & \cdot\cdot & c_{n-1,n-1} \end{matrix}$$

dessen Determinante null ist. Die Adjuncten einer Zeile verhalten sich zu einander, wie $1 : x^2 : x^3 : \ldots$, so dass die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f=0$ und $g=0$ durch eine Gleichung zweiten Grades bestimmt wird. U. s. w.

Bei verschwindender Determinante $S$ haben $f$ und $g$ einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Resultante $R$ verschwindet (8). Nun ist $S$ wie $R$ (5) eine homogene ganze Function sowohl der Grössen $a_0, a_1, \ldots$, als auch der Grössen $b_0, b_1, \ldots$ von $n$ Dimensionen, also ist der Quotient $S : R$ eine von diesen Grössen unabhängige Zahl. Das Anfangsglied von $R$ ist $a_0^n b_n^n$ und kommt in dem Anfangsglied von

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} S = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & \cdot\cdot & c_{n-1,n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{00} & \cdot\cdot & c_{0,n-1} \end{vmatrix}$$

mit demselben Zeichen vor. Daher ist $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} S : R = 1$, wie oben (12) durch directe Transformation gezeigt wurde.

**15.** Cayley hat die Berechnung der Resultante von $f$ und $g$ auf die Entwickelung der symmetrischen ganzen Function (§. 10, 2)

$$F(x, y) = \frac{f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)}{y - x} = \Sigma c_{ik} x^i y^k \qquad (i, k = 0, \ldots, n-1)$$

gegründet**). Dabei wird vorausgesetzt, dass $f$ vom $m$ten Grade, $g$ vom $n$ten Grade, und $m \leqq n$ ist (4). Weil $F(x, y) = F(y, x)$, so ist $c_{ik} = c_{ki}$.

---

*) Jacobi l. c. p. 106.

**) Vergl. Sylvester's Mittheilung Philos. Trans. 1853 p. 546. Hermite Crelle J. 52 p. 47 Anm. Cayley Crelle J. 53 p. 366. Borchardt Crelle J. 53 p. 367 und 57 p. 112.

Setzt man $a_i b_k - a_k b_i = d_{ik}$, so erhält man

$$(a_0 + a_1 x + \cdot\cdot)(b_0 + b_1 y + \cdot\cdot) - (b_0 + b_1 x + \cdot\cdot)(a_0 + a_1 y + \cdot\cdot)$$
$$= d_{01}(y - x) + d_{02}(y^2 - x^2) + \cdot\cdot + d_{0n}(y^n - x^n)$$
$$+ d_{12}(xy^2 - x^2y) + \cdot\cdot + d_{1n}(xy^n - x^n y)$$
$$+ \cdot\cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ d_{n-1,n}(x^{n-1}y^n - x^n y^{n-1})$$

und daher

$$F(x, y) = d_{01} + d_{02}(y + x) + \cdot\cdot + d_{0n}(y^{n-1} + \cdot\cdot + x^{n-1})$$
$$+ d_{12}xy + \cdot\cdot + d_{1n}(y^{n-2} + \cdot\cdot + x^{n-2})xy$$
$$+ \cdot\cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ d_{n-1,n}x^{n-1}y^{n-1}$$

Indem man die Glieder absondert, welche $x^i y^k$ enthalten, findet man wie oben (12 und 14)

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + d_{2,i+k-1} + \cdot\cdot$$

Abgesehn von dieser Entwickelung ist

$$F(\beta_i, \beta_k) = 0, \qquad F(\beta_i, \beta_i) = f(\beta_i)g'(\beta_i)$$

folglich

$$\Sigma \pm F(\beta_1, \beta_1) \,..\, F(\beta_n, \beta_n) = f(\beta_1) \,..\, f(\beta_n)\, g'(\beta_1) \,..\, g'(\beta_n)$$

Wenn man beide Seiten durch $\Delta(\beta_1, \,..\,, \beta_n)^2$ dividirt, so findet man (§. 10, 3 und 7)

$$\Sigma \pm c_{00} \,..\, c_{n-1,n-1} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} b_n{}^n f(\beta_1) \,..\, f(\beta_n)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} b_n{}^{n-m} R \ (5)$$

Die Theilbarkeit der Determinante durch $b_n{}^{n-m}$ ist oben (13) nachgewiesen worden.

16. Rosenhain hat die Resultante der Functionen $f$ und $g$ interpolatorisch durch die Werthe von $f$ und $g$ ausgedrückt, welche $m + n$ gegebenen Werthen des Arguments $x$ entsprechen *). Diese Werthe von $f$ sind eben so wenig von einander unabhängig, als die Werthe von $g$, weil $f$ durch $m + 1$ und $g$ durch $n + 1$ Werthe bestimmt ist (§. 10, 11).

---

*) Crelle J. 30 p. 157. Vergl. Kronecker Berl. Monatsbericht 1865 p. 690.

Sind $x_1, x_2, \ldots$ gegebene Werthe von $x$, so multiplicire man die Determinante $(n+m)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . \\ . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

zeilenweise mit

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n+m-1} \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & x_{n+m} & \ldots & x_{n+m}^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man das Product durch $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{n+m,n+m}$, so hat man

$$c_{11} = f(x_1) \qquad c_{12} = x_1 f(x_1) \ \ldots \qquad c_{1n} = x_1^{n-1} f(x_1)$$
$$c_{1,n+1} = g(x_1) \qquad c_{1,n+2} = x_1 g(x_1) \ \ldots \ c_{1,n+m} = x_1^{m-1} g(x_1)$$

u. s. w., folglich $RP$

$$= \begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 f(x_1) & \ldots x_1^{n-1} f(x_1) & g(x_1) & x_1 g(x_1) & \ldots x_1^{m-1} g(x_1) \\ . & . & & & & \\ f(x_{n+m}) & x_{n+m} f(x_{n+m}) & & & & \end{vmatrix}$$

Durch Entwickelung dieser Determinante nach den Subdeterminanten $n$ten Grades der ersten $n$ Colonnen (§. 4, 1) findet man

$$\Sigma f(x_1) \ldots f(x_n) \Delta(x_1, \ldots, x_n) g(x_{n+1}) \ldots g(x_{n+m}) \Delta(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

eine Summe von $\binom{n+m}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $1, 2, \ldots, n$ alle Combinationen von $n$ verschiedenen Nummern der Reihe $1, 2, \ldots, n+m$ setzt, und die übrigen Nummern so ordnet, dass die Reihe aller Nummern jedesmal mit der Reihe $1, 2, \ldots, n+m$ zu derselben Classe der Permutationen gehört. Nun ist identisch (§. 10, 21)

$$\frac{\Delta(x_1, \ldots x_{n+m})}{\Delta(x_1, \ldots, x_n) \Delta(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} = D(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

folglich, unabhängig von den Permutationen,

$$R = \Sigma \frac{f(x_1) \ldots f(x_n) g(x_{n+1}) \ldots g(x_{n+m})}{D(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})}$$

Anmerkung. Mit Hülfe dieser Formel hat Rosenhain a. a. O. Cauchy's interpolatorische Darstellung einer gebrochenen algebraischen Function *) abgeleitet.

Die Resultante von $f$ und $(x-z)g$ ist (7) $Rf(z)$, und wird nach der angegebenen Regel durch die Werthe der beiden Functionen ausgedrückt, welche $m+n+1$ Werthen von $x$ entsprechen, wie folgt:

$$\Sigma \frac{f(x_0)\,..\,f(x_n)\,g(x_{n+1})\,..\,g(x_{n+m})\,(x_{n+1}-z)\,..\,(x_{n+m}-z)}{D(x_0,\,..,\,x_n;\;x_{n+1},\,..,\,x_{n+m})}$$

Die Resultante von $(x-z)f(x)$ und $g(x)$ ist $Rg(z)$ und nach derselben Regel

$$\Sigma \frac{f(x_0)\,..\,f(x_{n-1})\,g(x_n)\,..\,g(x_{n+m})\,(x_0-z)\,..\,(x_{n-1}-z)}{D(x_0,\,..,\,x_{n-1};\;x_n,\,..,\,x_{n+m})}$$

Durch Division erhält man, nachdem man den Zähler und den Nenner durch $g(x_0)\,..\,g(x_{n+m})$ dividirt und den Quotienten $f(x_i):g(x_i)$ durch $u_i$ bezeichnet hat,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\Sigma \dfrac{u_0\,..\,u_n}{D(x_0,..,x_n;\;x_{n+1},..,x_{n+m})}(x_{n+1}-z)\,..\,(x_{n+m}-z)}{\Sigma \dfrac{u_0\,..\,u_{n-1}}{D(x_0,\,..,\,x_{n-1};\;x_n,\,..,\,(x_{n+m})}(x_0-z)\,..\,(x_{n-1}-z)}$$

17. Borchardt hat die Resultante der Functionen $f$ und $g$, beide $n$ten Grades, interpolatorisch durch die Werthe von $f$ und $g$ ausgedrückt, welche $n+1$ gegebenen Werthen $x_0, x_1, .., x_n$ des Arguments $x$ entsprechen **).

Unter der Voraussetzung (15)

$$F(x,\,y) = \frac{f(x)\,g(y)-f(y)\,g(x)}{y-x} = \Sigma c_{ik} x^i y^k$$

ist die Determinante $\Sigma \pm c_{00}\,..\,c_{n-1,n-1}$ der Resultante $R$ gleich oder entgegengesetzt gleich. Nach §. 10, 3 hat man aber

$$\Sigma \pm c_{00}\,..\,c_{n-1,n-1} = \frac{\Sigma \pm F(x_1,\,x_1)\,..\,F(x_n,\,x_n)}{\Delta(x_1,\,..,\,x_n)^2}$$

Bildet man nun die Function $(n+1)$ten Grades

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\,..\,(x-x_n)$$

---

*) Cauchy Anal. algébr. Note 5. Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 127.

**) Berl. Monatsbericht 1859 p. 376 und Crelle J. 57 p. 111.

so ist (§. 10, 8)

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)^2 = \frac{\Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)^2}{\varphi'(x_0)^2} = \frac{\varphi'(x_1)^2 \ldots \varphi'(x_n)^2}{\Delta(x_0, \ldots, x_n)^2}$$

Nach Einführung der Elemente

$$h_{ik} = \frac{F(x_i, x_k)}{\varphi'(x_i)\varphi'(x_k)} = h_{ki}$$

erhält man daher

$$\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} = \Delta(x_0, \ldots, x_n)^2 \Sigma \pm h_{11} \ldots h_{nn}$$

Eine besondere Eigenschaft der Elemente dieser letztern Determinante ergiebt sich daraus, dass $F(x, y)$ in Bezug auf $x$ vom $(n-1)$ten Grade, dagegen $\varphi(x)$ vom $(n+1)$ten Grade ist, dass also (§. 10, 9)

$$\frac{F(x_0, y)}{\varphi'(x_0)} + \frac{F(x_1, y)}{\varphi'(x_1)} + \ldots + \frac{F(x_n, y)}{\varphi'(x_n)} = 0$$

Demnach ist

$$h_{0k} + h_{1k} + \cdots + h_{nk} = 0$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} -h_{00} &= h_{01} + h_{02} + \cdots + h_{0n} \\ -h_{11} &= h_{01} + h_{12} + \cdots + h_{1n} \\ -h_{22} &= h_{02} + h_{12} + \cdots + h_{2n} \end{aligned}$$

u. s. w. Nun haben in der verschwindenden Determinante $(n+1)$ten Grades $(-1)^{n+1} \Sigma \pm h_{00} h_{11} \ldots h_{nn}$ alle Elemente gleiche Adjuncten (§. 3, 12), deren gemeinschaftlicher Werth durch die Formel

$$[0, 1, \ldots, n]$$

bezeichnet wird. Also ist

$$\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} = (-1)^n \Delta(x_0, \ldots, x_n)^2 [0, 1, \ldots, n]$$

18. Die Formel $[0, 1, \ldots, n]$ d. h. die Determinante $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} h_{01} + \cdots + h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & . \\ -h_{21} & h_{02} + \cdots + h_{2n} & -h_{23} & . \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{03} + \cdots + h_{3n} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

ist von BORCHARDT a. a. O. nach den Producten der in der Diagonale stehenden Grössen $h_{01}$, $h_{02}$, .., $h_{0n}$ entwickelt worden (vergl. §. 5, 3).

Der Theil derselben, welcher keine dieser Grössen enthält,

$$\begin{vmatrix} h_{12} + \cdots + h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & . \\ -h_{21} & h_{12} + \cdots + h_{2n} & -h_{23} & . \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{13} + \cdots + h_{3n} & . \\ .. & . & . & \end{vmatrix}$$

ist wiederum eine verschwindende Determinante (§. 3, 12), in welcher alle Elemente dieselbe Adjuncte haben, die durch $[1, 2, .., n]$ bezeichnet wird. Daher ist der Theil der gesuchten Entwickelung, welcher je eine der Grössen $h_{01}$, $h_{02}$, .. enthält,

$$h_{01}[1, 2, \ldots, n] + h_{02}[1, 2, \ldots, n] + \ldots$$

Der Theil von $[0, 1, .., n]$, welcher das Product $h_{01}\, h_{02}$ enthält, ist eine Subdeterminante $(n-2)$ten Grades, die aus der Determinante $[2, 3, .., n]$ dadurch gebildet werden kann, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen $h_{23}$, $h_{24}$, .., $h_{2n}$ durch die Summen

$$h_{13} + h_{23}, \quad h_{14} + h_{24}, \quad \ldots, \quad h_{1n} + h_{2n}$$

ersetzt. Bezeichnet man die so transformirte Determinante durch

$$[\overline{1+2}, 3, \ldots, n]$$

so ist der Theil von $[0, 1, .., n]$, welcher je 2 von den Grössen $h_{01}$, $h_{02}$, .. enthält,

$$h_{01}\, h_{02}[\overline{1+2}, 3, 4, \ldots, n] + h_{01}\, h_{03}[\overline{1+3}, 2, 4, \ldots, n] + \ldots$$

Auf analoge Weise wird der Theil von $[0, 1, .., n]$, welcher je 3 von jenen Grössen enthält, durch

$$h_{01}\, h_{02}\, h_{03}[\overline{1+2+3}, 4, 5, \ldots] + h_{01}\, h_{02}\, h_{04}[\overline{1+2+4}, 3, 5, \ldots] + \ldots$$

ausgedrückt, indem man $[\overline{1+2+3}, 4, 5, ..]$ aus $[3, 4, 5, ..]$ dadurch ableitet, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen $h_{34}$, $h_{35}$, .. durch die Summen

$$h_{14} + h_{24} + h_{34}, \qquad h_{15} + h_{25} + h_{35}, \ldots$$

ersetzt. U. s. w. So entsteht die Recursionsregel

$$[0, 1, .., n] = \Sigma h_{01}[1, 2, ..] + \Sigma h_{01} h_{02}[\overline{1+2}, 3, ..]$$
$$+ \Sigma h_{01} h_{02} h_{03}[\overline{1+2+3}, 4, ..] + ..$$
$$+ h_{01} h_{02} .. h_{0n}$$

Zufolge derselben ist

$$[0, 1] = h_{01}$$
$$[0, 1, 2] = \Sigma h_{01}[1, 2] + h_{01} h_{02}$$
$$= h_{01} h_{12} + h_{02} h_{12} + h_{01} h_{02}$$
$$[0, 1, 2, 3] = \Sigma h_{01}[1, 2, 3] + \Sigma h_{01} h_{02}[\overline{1+2}, 3] + h_{01} h_{02} h_{03}$$
$$= (h_{01} + h_{02} + h_{03})[1, 2, 3] + h_{01} h_{02}[\overline{1+2}, 3]$$
$$+ h_{01} h_{03}[\overline{1+3}, 2] + h_{02} h_{03}[\overline{2+3}, 1] + h_{01} h_{02} h_{03}$$

Die Formel $[1, 2, 3]$ hat 3 Glieder, die Formel $[\overline{1+2}, 3]$ hat deren 2, also hat $[0, 1, 2, 3]$ deren $4^2$. Ebenso erkennt man, dass die Formel

$$[\overline{1+2+\cdots+k}, k+1, k+2, k+3]$$

$3^2 k + 3 . 2k^2 + k^3 = k(k+3)^2$ Glieder hat. Unter der Annahme, dass für die Werthe von $m$, welche eine bestimmte Grenze nicht übersteigen, die Formel

$$[\overline{1+2+\cdots+k}, k+1, .., k+m]$$

$k(k+m)^{m-1}$ Glieder besitzt, findet man vermöge der Recursionsregel für

$$[\overline{1+2+\cdots+k}, k+1, .., k+m+1]$$

die Anzahl der Glieder

$$k(m+1)(1+m)^{m-1} + k^2\binom{m+1}{2} . 2(2+m-1)^{m-2} + k^3\binom{m+1}{3} . 3(3+m-2)^{m-3} + \cdots$$
$$= k(m+1)^m + k^2 m(m+1)^{m-1} + k^3\binom{m}{2}(m+1)^{m-2} + \cdots$$
$$= k(k+m+1)^m$$

Demnach ist die bis zu $m = 3$ gültige Annahme unbeschränkt richtig.

19. Wenn durch $f$ eine Function $n$ten Grades von $x$, durch $f'$ ihr Differentialcoefficient bezeichnet wird, so ist die Resultante von $f'$ und $f$ (5)

$$a_n^{n-1} f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot & \cdot \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Das System hat $n$ Zeilen der ersten Art und $n-1$ Zeilen der zweiten Art. Subtrahirt man die mit $n$ multiplicirte letzte Zeile von der $n$ten, so erhält die $n$te Zeile folgende Elemente

$$0, \ldots, 0, \quad -na_0, \quad -(n-1)a_1, \ldots, \quad -a_{n-1}, \quad 0$$

und die Resultante reducirt sich (§. 3, 3) auf das Product von $a_n$ mit einer Determinante $(2n-2)$ten Grades, welche durch $A$ bezeichnet wird. Nach §. 10, 7 ist

$$A = a_n^{n-2} f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n^{2n-2} \cdot \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$$

eine symmetrische ganze Function der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (vergl. §. 10, 7) und eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0, \ldots, a_n$ von $2n-2$ Dimensionen, welche die Discriminante der ganzen Function $f(x)$ und der Gleichung $f(x)=0$ genannt wird*). Wenn $a_n$ verschwindet, so wird eine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ unendlich gross; dabei verschwindet die Discriminante im Allgemeinen nicht, sondern wird zur Discriminante einer Function $(n-1)$ten Grades.

Die Discriminante des Products $fg$ (abgesehn vom Zeichen) erscheint hiernach (5) als das Product der Discriminanten von $f$ und $g$ multiplicirt mit dem Quadrat der Resultante von $f$ und $g$. Wenn $A$ die Discriminante von $f$ ist, so findet man z. B. für $(x-t)f$ die Discriminante $Af(t)^2$.

20. Wenn die Discriminante von $f$ nicht verschwindet, so haben $f$ und $f'$ keinen gemeinschaftlichen Divisor (8) und die Wurzeln der Gleichung $f=0$ sind sämmtlich von einander verschieden.

---

*) GAUSS Demonstr. nova altera 6 (Comm. Gott. Vol. 3) hatte dieser Formel den Namen »Determinante der Function $f(x)$ oder der Gleichung $f(x)=0$« beigelegt. Vergl. JOACHIMSTHAL Crelle J. 33 p. 371. JACOBI Crelle J. 40 p. 244. Bei dem jetzigen Sprachgebrauch ist der von SYLVESTER (Philos. Mag. 1851, II p. 406) gebildete Name »Discriminante« bezeichnender.

Wenn die Discriminante von $f$ verschwindet, so haben $f$ und $f'$ einen gemeinschaftlichen Divisor und die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ sind nicht alle von einander verschieden. Der gemeinschaftliche Divisor theilt auch die Function $pf + qxf'$, welche aus der gegebenen Function dadurch abgeleitet wird, dass man ihre Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der Reihe nach mit den Gliedern einer beliebigen arithmetischen Progression $p, p+q, p+2q, \ldots$ multiplicirt, und welche vor Erfindung der Differentialrechnung von Hudde 1657*) zur Bestimmung mehrfacher Wurzeln der Gleichung $f = 0$ gebildet worden ist.

Wenn $f$ und $f'$ den gemeinschaftlichen Divisor $t^k$ haben, und die Discriminante von $t$ nicht null ist, so ist $f$ durch $t^{k+1}$ theilbar. Es sei z. B.

$$f(x) = t^k u$$

$$f' = t^k u' + k t^{k-1} t' u = t^k \left( u' + k \frac{t'u}{t} \right)$$

Da nun $t'$ und $t$ einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, so ist $u$ durch $t$, also $f(x)$ durch $t^{k+1}$ theilbar.

**21.** Die ganze Function $f(x)$ kann als ein besonderer Werth der binären Form d. h. der homogenen ganzen Function von 2 Variablen $y, x$ desselben Grades

$$u = A_0 y^n + \binom{n}{1} A_1 y^{n-1} x + \binom{n}{2} A_2 y^{n-2} x^2 + \cdots + A_n x^n$$

angesehn werden**), welche durch Composition der Glieder von $(y+x)^n$ mit den Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ entsteht, und eine $n$te Potenz in dem Falle wird, dass $A_0, A_1, \ldots, A_n$ eine geometrische Progression bilden.

Nach der Fundamentaleigenschaft der homogenen Functionen hat man die Identität

$$nu = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$$

---

*) Hudde Epist. I. Reg. 10 in Schooten's Ausgabe von Descartes' Geometrie.

**) Dieses wichtige Hülfsmittel der Analysis ist von Newton Arithm. univ. Inventio divisorum p. 43, Plücker System d. anal. Geom. §. 1, 7, Hesse Crelle J. 28 p. 102, Joachimsthal Crelle J. 33 p. 373, Jacobi Crelle J. 40 p. 247 und Andern, zu dem gegenwärtigen Zweck von Salmon higher plane curves 1852 p. 296 angewendet worden.

Der gemeinschaftliche Divisor von $u$ und $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}$ ist also auch ein Divisor von $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}$. Die unter der Voraussetzung $y = 1$ gebildete Resultante von $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}$ ist wie die Discriminante von $f(x)$ eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0, a_1, .., a_n$ von $2n - 2$ Dimensionen und verschwindet zugleich mit der Discriminante von $f(x)$. Daher hat jene Resultante zu dieser Discriminante ein von den Coefficienten $a_0, a_1, ..$ unabhängiges Verhältniss.

In der That, wenn man in der Determinante $A$ (19) jede der letzten $n - 2$ Zeilen mit $n$ multiplicirt, und von ihnen der Reihe nach die 2te, 3te, .. Zeile des Systems subtrahirt, so findet man nach Umstellung der $n$ten Zeile

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . \\ & & . & . & . \\ na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & . & . \\ & na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & . \\ & & . & . & . \end{vmatrix},$$

d. i. die Resultante von $f'(x)$ und $nf(x) - xf'(x)$.

**Beispiele.** Die Discriminante der Function 2ten Grades

$$a_0 + 2a_1 x + a_2 x^2$$

ist die Resultante von $a_1 + a_2 x$ und $a_0 + a_1 x$, nämlich

$$a_1^2 - a_0 a_2$$

Die Discriminante von $a_0 + 3a_1 x + 3a_2 x^2 + a_3 x^3$ ist die Resultante von

$$a_1 + 2a_2 x + a_3 x^2$$
$$a_0 + 2a_1 x + a_2 x^2$$

nämlich in der verkürzten Gestalt (12)

$$- \begin{vmatrix} 2(a_1^2 - a_0 a_2) & a_1 a_2 - a_0 a_3 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 & 2(a_2^2 - a_1 a_3) \end{vmatrix}$$

Ebenso findet man die Discriminante von

$$a_0 + 4a_1 x + 6a_2 x^2 + 4a_1 x^3 + a_4 x^4$$

$$- \begin{vmatrix} 3(a_1^2 - a_0 a_2) & 3(a_1 a_2 - a_0 a_3) & a_1 a_3 - a_0 a_4 \\ 3(a_1 a_2 - a_0 a_3) & 9a_2^2 - 8 a_1 a_3 - a_0 a_4 & 3(a_2 a_3 - a_1 a_4) \\ a_1 a_3 - a_0 a_4 & 3(a_2 a_3 - a_1 a_4) & 3(a_3^2 - a_2 a_4) \end{vmatrix}$$

22. Das in der Discriminante von $f(x)$ enthaltene Product aller positiven und negativen Differenzen zwischen den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Gleichung $f(x) = 0$ ist der Quotient des bekannten Gliedes durch den Coefficienten des höchsten Gliedes in der Gleichung, deren Wurzeln jene Differenzen sind*).

Um diese Gleichung zu bilden, bemerke man, dass dem System

$$f(x) = 0, \qquad f(x+y) = 0$$

genügt wird, indem man für $x$ und $x+y$ alle Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, mithin für $y$ alle Differenzen der Wurzeln, unter denen $n$ verschwinden, und für $x$ den jedesmaligen Subtrahenden setzt. Dabei verschwindet die Resultante $R$ der beiden durch $f(x)$ und $f(x+y)$ bezeichneten Functionen von $x$ (8). Also ist $R$ durch $y^n$ theilbar, und $R : y^n = 0$ die Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen zwischen jeder der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und den übrigen Grössen dieser Reihe sind. Diese Differenzen sind aber paarweise entgegengesetzt gleich, also kommen in $R : y^n$ nur gerade Potenzen von $y$ vor.

Unmittelbar findet man die von den verschwindenden Wurzeln befreite Gleichung, indem man**) von dem System

$$\text{(I)} \qquad f(u+v) = 0, \qquad f(u-v) = 0$$

ausgeht, welchem durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k, \qquad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

---

*) Diese unter dem Namen »équation aux carrés des différences« bekannte Gleichung ist von Waring Misc. analyt. 1762 p. 17 mit Hülfe von symmetrischen Functionen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ construirt und zur Untersuchung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung gebraucht worden. Besondere Ausführungen für die Gleichungen 4ten und 5ten Grades hat Waring in den Philos. Transact. 1763 p. 294 mitgetheilt. Die Ableitung der erwähnten Gleichung durch Elimination wurde von Euler Calc. diff. II, §. 244 gezeigt, und ausführlich von Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 311 art. 8. Résolution des équat. art. 8 und Note 3) behandelt.

**) Nach Borchardt's Angabe.

genügt wird. Dieselben Auflösungen hat das System

$$\text{(II)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2}=0, \qquad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2}=0$$

dessen erste Gleichung nur gerade, und dessen zweite Gleichung nur ungerade Potenzen von $v$ enthält. Weil $f(u+v)-f(u-v)$ durch $v$ theilbar ist, so umfasst das System (II) die beiden Systeme

$$\text{(III)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2}=0, \qquad v=0$$

und

$$\text{(IV)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2}=0, \qquad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2v}=0$$

Dem System (IV) wird durch die Werthe

$$2u=\alpha_i+\alpha_k, \qquad 2v=\alpha_i-\alpha_k$$

unter der Beschränkung genügt, dass $i$ und $k$ verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ bedeuten. Bildet man nun die Resultanten $\psi(v^2)$ und $\chi(u)$ der Functionen

$$\frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2v}$$

jene in Bezug auf die Variable $u$, diese in Bezug auf $v^2$, so ist

$$\psi(v^2)=0, \quad \text{wenn } v^2=\frac{1}{4}(\alpha_i-\alpha_k)^2$$

$$\chi(u)=0, \quad \text{wenn } u=\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_k)$$

## §. 12. Die Functionaldeterminanten.

1. Wenn $y_1, \ldots, y_n$ Functionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind, so besteht für die Differentiale das lineare System

$$dy_1=\frac{\partial y_1}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}dx_n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\partial y_n=\frac{\partial y_n}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial y_n}{\partial x_n}dx_n$$

Die Determinante dieses Systems von Differentialen (§. 8, 1) $\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}$ ist die Determinante eines Systems, dessen Zeilen

die ersten Fluxionen (die partialen Differentialcoefficienten erster Ordnung) der gegebenen Functionen enthalten. Sie wird die Functionaldeterminante *) d. i. Fluxionendeterminante (»Jacobian« CAYLEY Crelle J. 52 p. 276) der gegebenen Functionen genannt und nach DONKIN Philos. Trans. 1854, I p. 72 wie eine Fluxion bezeichnet

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

z. B. $u = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad u' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial(u, u')}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} ax + by & bx + by \\ a'x + b'y & b'x + c'y \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} u & bx + cy \\ u' & b'x + c'y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y^2 & -yx & x^2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

Wenn bei den in Betracht kommenden Werthen $x$ die Functional-determinante nicht null ist, so können die Differentiale $dx$ durch die Differentiale $dy$ ausgedrückt werden. Man findet aus dem angegebenen linearen System

$$\Delta\, dx_k = \Delta_{1k}\, dy_1 + \cdots + \Delta_{nk}\, dy_n$$

indem man durch $\Delta$ die Functionaldeterminante, durch $\Delta_{ik}$ die Adjuncte von $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ bezeichnet. Wenn aber bei allen $x$ die Functionaldeterminante null ist, so sind die Differentiale $dy_1, \ldots, dy_n$ durch eine oder mehr homogene lineare Gleichungen verbunden, deren Coefficienten Subdeterminanten des Systems der Fluxionen sind.

Wenn die Grössen $y_1, \ldots, y_n$ nicht unabhängig von einander, sondern durch die Gleichung $\varphi(y_1, \ldots, y_n) = 0$ verbunden sind, so verschwindet die Functionaldeterminante identisch d. h. bei allen $x$ **). Denn die Determinante

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

---

*) JACOBI de determ. functionalibus (Crelle J. 22 p. 319) §. 5. Vorlesungen über Dynamik p. 100. Mehrere unter den hierher gehörigen Sätzen hatte JACOBI in früheren Abhandlungen, namentlich 1833 Crelle J. 12 p. 38 ff. gegeben.

**) JACOBI det. funct. §. 6.

ist null, weil in der $i$ten Zeile des Systems nach Addition der multiplicirten andern Zeilen alle Elemente verschwinden zufolge der Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdot\cdot + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, .., n)$$

2. Wenn die Grössen $y$ explicite gegebene Functionen der Grössen $x$ sind, so kann $y_i$ in Bezug auf $x_k$ differentiirt, also auch die Functionaldeterminante unmittelbar gebildet werden.

Wenn insbesondere $f_2$ die Variable $x_1$ nicht enthält, wenn $f_3$ die Variablen $x_1, x_2$ nicht enthält, wenn überhaupt $f_i$ die Variablen $x_1, .., x_{i-1}$ nicht enthält, so erscheint die Functionaldeterminante in Form eines Products, weil von ihr nur das Anfangsglied übrig bleibt (§. 3, 3).

Wenn die Grössen $y$ gebrochene Functionen mit demselben Nenner sind, z. B.*)

$$y_i = \frac{u_i}{u}$$

so ist $u^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = u\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_i\frac{\partial u}{\partial x_k}$, folglich

$$u^{2n+1}\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdot\cdot\frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \begin{vmatrix} u & u\frac{\partial u}{\partial x_1} - u\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\cdot & u\frac{\partial u}{\partial x_n} - u\frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & u\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - u_1\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\cdot & u\frac{\partial u_1}{\partial x_n} - u_1\frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\cdot & \cdot\;\cdot \\ u_n & u\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - u_n\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\cdot & u\frac{\partial u_n}{\partial x_n} - u_n\frac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdot\cdot\frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \frac{1}{u^{n+1}}\begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ u_n & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

und durch die Substitution $u_i = \frac{v_i}{t}$ findet man

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 40.

$$\begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ u_n & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{t^{n+1}} \begin{vmatrix} v & \frac{\partial v}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial v}{\partial x_n} \\ v_1 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ v_n & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

unabhängig von den Differentialen der Function $t$.

3. Wenn die Grössen $y$ implicite gegebene Functionen der Grössen $x$ sind zufolge des Systems von $n$ Gleichungen

$$F_1(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \quad F_n(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

so ist*)

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = (-1)^n \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

**Beweis.** Zufolge der Voraussetzungen hat man

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} dy_n + \frac{\partial F_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$dy_r = \frac{\partial y_r}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial y_r}{\partial x_n} dx_n$$

Wenn nun unter den Variablen $x$ nur $x_k$ sich ändert, so ist

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0$$

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

folglich (§. 6, 1)

$$(-1)^n \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

Anmerkung. Wenn die Grössen $F_1, F_2, \ldots$ so beschaffen sind, dass $F_i$ die Variablen $x_1, \ldots, x_{i-1}$ nicht enthält, so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

das Product der in der Diagonale stehenden Elemente (2).

*) Jacobi det. funct. §. 10 und 18.

Wenn die Grössen $F_1, F_2, \ldots$ so beschaffen sind, dass

$$F_i = -y_i + f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = (-1)^n$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Und wenn man aus dem gegebenen System $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$ das System

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots) \\ y_2 &= \varphi_2(y_1, x_2, \ldots) \\ y_3 &= \varphi_3(y_1, y_2, x_3, \ldots) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n &= \varphi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

abgeleitet hätte, so erhielte man die Functionaldeterminante der Grössen $y$ in Bezug auf die Variablen $x$ in Form des Products

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

In der That ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \cdot \\ 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

das Product der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & 1 & 0 & \cdot \\ -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdot \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdot \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

zufolge der Identität

$$-\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}-\cdots-\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_{i-1}}\frac{\partial y_{i-1}}{\partial x_k}+\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}$$

4. Wenn $m < n$ und zufolge des Systems von $n$ Gleichungen

$$F_1(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_m)=0,\ldots,\quad F_n(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_m)=0$$

die Grössen $y$ implicite gegebene Functionen der Grössen $x$ sind, so ist*)

$$\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial y_m}{\partial x_m}=(-1)^m\frac{\Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial x_m}\frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial y_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

**Beweis.** Die Determinante

$$(-1)^m\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

ist das Product der Determinanten

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} & \frac{\partial y_1}{\partial y_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial y_n}\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} & \frac{\partial y_n}{\partial y_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

weil nach (3) bei $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\cdots+\frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}=-\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$$

und bei $k = m+1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_k}+\cdots+\frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_k}=\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$$

Der zweite Factor ist von $\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial y_m}{\partial x_m}$ nicht verschieden (§. 3, 3).

Insbesondre ist bei $m = 1$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=-\frac{\Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial y_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

---

*) Jacobi det. funct. §. 13.

5. Wenn $z_1, .., z_m$ gegebene Functionen der Grössen $y_1, .., y_n$, und diese wiederum gegebene Functionen der Grössen $x_1, .., x_m$ sind, so findet man die Functionaldeterminante der Grössen $z$ in Bezug auf die Grössen $x$*) bei $m < n$

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_m} = \sum_{tuv..}\left(\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial y_t}\frac{\partial z_2}{\partial y_u}\frac{\partial z_3}{\partial y_v} \cdot\cdot \Sigma \pm \frac{\partial y_t}{\partial x_1}\frac{\partial y_u}{\partial x_2}\frac{\partial y_v}{\partial x_3} \cdot\cdot\right)$$

eine Summe, deren Glieder dadurch gebildet werden, dass man für $tuv..$ alle Combinationen von je $m$ verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis $n$ setzt. Bei $m = n$ ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \cdot\cdot \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial(z_1, .., z_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = \frac{\partial(z_1, .., z_n)}{\partial(y_1, .., y_n)} \frac{\partial(y_1, .., y_n)}{\partial(x_1, .., x_n)}$$

Unter der Voraussetzung $m > n$ verschwindet die Functionaldeterminante identisch d. h. bei beliebigen Werthen der Variablen $x$. Alles dieses folgt nach §. 6, 1 aus der Voraussetzung

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \frac{\partial z_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdot\cdot + \frac{\partial z_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

6. Dass eine gegebene Function $f_0(x_1, .., x_n)$ nach Einführung von neuen von einander unabhängigen, aber von $x_1, .., x_n$ abhängigen Variablen $f_1, .., f_n$ durch weniger als $n$ derselben ausdrückbar ist, erkennt man daran, dass unter den Fluxionen der transformirten Function in Bezug auf $f_1, .., f_n$ eine oder mehrere verschwinden.

Wenn die Subdeterminanten $(m+1)$ten Grades, welche aus dem System der Fluxionen von $f_0, f_1, .., f_m$ in Bezug auf $x_1, .., x_n$

$$\begin{matrix} f_{01} & \cdot\cdot & f_{0n} \\ f_{11} & \cdot\cdot & f_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{m1} & \cdot\cdot & f_{mn} \end{matrix}$$

durch Auswahl von $m+1$ Colonnen gebildet werden können, alle identisch verschwinden, so ist die transformirte Function von

*) Jacobi det. funct. §. 11.

den Grössen $f_{m+1}, \ldots, f_n$ unabhängig und in Wahrheit von nicht mehr als $m$ Variablen abhängig*).

**Beweis.** Nach der Voraussetzung ist die Functionaldeterminante der $f_1, \ldots$ in Bezug auf die $x_1, \ldots$

$$\Delta = \Sigma \pm f_{11} \ldots f_{nn} = f_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + f_{in}\Delta_{in}$$

nicht null (1). Durch die Substitution

$$dx_k = \frac{1}{\Delta}\sum_h \Delta_{hk}\, df_h$$

findet man

$$df_0 = \sum_k f_{0k}\, dx_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{kh} f_{0k}\Delta_{hk}\, df_h$$

Die Fluxion der transformirten Function $f_0$ in Bezug auf $f_h$ wird demnach gefunden, indem man durch $\Delta$ die Summe

$$f_{01}\Delta_{h1} + \cdots + f_{0n}\Delta_{hn}$$

dividirt d. i. die Determinante $n$ten Grades, welche aus $\Delta$ abgeleitet wird, indem man $f_h$ durch $f_0$ ersetzt. Wenn man nun in $\Delta$ der Reihe nach $f_{m+1}, \ldots, f_n$ durch $f_0$ ersetzt, so verschwinden identisch die abgeleiteten Determinanten und die entsprechenden Fluxionen der $f_0$, weil die aus $m+1$ bestimmten Zeilen des Systems zu bildenden Subdeterminanten $(m+1)$ten Grades nach der Voraussetzung sämmtlich identisch verschwinden (§. 4, 1).

7. Wenn die Functionen $f_1, \ldots, f_n$ die ersten Fluxionen einer gegebenen Function $f$ sind, d. h.

$$df = f_1\, dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n, \qquad df_i = f_{i1}\, dx_1 + \cdots + f_{in}\, dx_n$$

so ist die Functionaldeterminante die Determinante des Systems der zweiten Fluxionen $\Sigma \pm f_{11} \ldots f_{nn}$ (Hesse's »Determinante der Function« 1844. Crelle J. 28 p. 83, »Hessian« Sylvester Cambr. and Dublin math. J. 6 p. 186). Die Determinante einer quadratischen Form $f$ ist von der Functionaldeterminante ihrer halben ersten Fluxionen nicht verschieden.

Wenn die Fluxionen $f_1, \ldots, f_n$ durch eine Gleichung verbun-

*) Der Jacobi'sche Satz (det. funct. §. 7) ist auf diese Weise von Kronecker gefasst worden. Briefl. Mittheilung 1869 März 11. Vergl. Crelle J. 72 p. 155.

den sind, so ist die Functionaldeterminante derselben, die Determinante der Function $f$, null bei allen $x$ (1). Wenn insbesondere $f_1, \ldots, f_n$ durch eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0$$

verbunden sind, so geht die Function $f$ durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + c_1 y_n \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_{n-1} &= y_{n-1} + c_{n-1} y_n \\ x_n &= c_n y_n \end{aligned}$$

in eine Function der $n - 1$ Variablen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ über, weil

$$\frac{\partial f}{\partial y_n} = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_n} + \cdots + f_n \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0 \text{*)}.$$

8. Wenn die Function $F(y_1, \ldots, y_n)$ nach Einführung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, von welchen $y_1, \ldots, y_n$ in gegebener Weise abhängen, durch $G(x_1, \ldots, x_n)$ ausgedrückt wird, so wird das zwischen bestimmten endlichen Grenzen genommene $n$fache Integral $J = \int F(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$ durch

$$\int G(x_1, \ldots, x_n) \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_1 \cdots dx_n$$

ausgedrückt. Dabei wird vorausgesetzt, dass jedem System von Werthen der $y$ ein System von Werthen der $x$ eindeutig entspricht; dass die entsprechenden Differentiale gleiche Zeichen erhalten; dass die Grenzen der Integrationen in Bezug auf die $x$ entsprechend den gegebenen Grenzen der Integrationen in Bezug auf die $y$ gezogen werden**).

---

*) Hesse Crelle J. 42 p. 122. Die Umkehrung, dass von einer beliebigen Form $f$ mit identisch verschwindender Determinante die Fluxionen $f_1, \ldots, f_n$ durch eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten verbunden seien, hat Hesse a. a. O. und 56 p. 263 zu beweisen gesucht. Bei quadratischen Formen und bei beliebigen binären Formen ist diese Umkehrung zulässig. Bei cubischen Formen von 3 und von 4 Variablen ist von Pasch der Nachweis der Umkehrung gegeben worden 1874 Dec. Vergl. Crelle J. 80.

**) Die Transformation eines zweifachen Integrals (integrale duplicatum) ist zuerst von Euler 1759 Nov. Comm. Petrop. 14, I p. 72 (Calc.

**Beweis.** Die Reihenfolge der Integrationen ist beliebig. Wenn man mit der Integration in Bezug auf $y_n$ beginnt, und

$$y_n = \varphi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n)$$

setzt, so hat man $dy_n$ durch $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n$ zu ersetzen, weil $y_1, \ldots, y_{n-1}$ unverändert bleiben, und findet

$$J = \int F(y_1, \ldots, y_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dy_1 \ldots dy_{n-1} dx_n.$$

Wenn man die Entwickelung dieses Integrals mit der Integration in Bezug auf $y_{n-1}$ beginnt und

$$y_{n-1} = \varphi_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

setzt, so hat man $dy_{n-1}$ durch $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1}$ zu ersetzen, weil $y_1, \ldots, y_{n-2}, x_n$ unverändert bleiben, und findet

$$J = \int F(y_1, \ldots, y_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dy_1 \ldots dy_{n-2} dx_{n-1} dx_n$$

Indem man so fortfährt, erhält man endlich

$$J = \int F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_n$$

Das Product der hinzutretenden Differentialcoefficienten ist der Functionaldeterminante der Grössen $y$ in Bezug auf die Grössen $x$ gleich (3).

9. Zu derselben Regel gelangt man unmittelbar durch Verfolgung des Weges, den Lagrange (l. c.) bei der Transformation eines dreifachen Integrals eingeschlagen hat*).

Wenn $f_1, f_2, \ldots, f_n$ Functionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, und durch $f_{ik}$ der Differentialcoefficient von $f_i$ in Bezug auf $x_k$ bezeichnet wird, so besteht das System von linearen Gleichungen

---

integr. IV p. 416) gezeigt worden. Bald darauf hat Lagrange Mém. de l'Acad. de Berlin 1773 p. 125 die Transformation eines dreifachen Integrals ausgeführt. Der allgemeine Ausdruck des transformirten vielfachen Integrals rührt von Jacobi her (Crelle J. 12 p. 38, det. funct. §. 19). Denselben Ausdruck hat später Catalan gefunden. Mém. cour. p. l'acad. de Bruxelles t. 14 (1840). Vergl. Bull. de l'acad. de Belgique t. 13, 6.

*) Vergl. Catalan l. c. Moigno Leçons II p. 223.

$$df_1 = f_{11}dx_1 + \cdots + f_{1n}dx_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$df_n = f_{n1}dx_1 + \cdots + f_{nn}dx_n$$

Durch Auflösung desselben erhält man (1)

$$\Delta_{1k}df_1 + \cdots + \Delta_{nk}df_n = R_n dx_k$$

wenn $R_n = \Sigma \pm f_{11} \cdots f_{nn}$ und $\Delta_{ik}$ die Adjuncte von $f_{ik}$ in $R_n$ bedeutet, so dass insbesondere $\Delta_{nn} = R_{n-1}$ ist. Es sei nun $U$ eine gegebene Function von $f_1, .., f_n$ und

$$\int U\, df_1\, df_2 \, .. \, df_n$$

das zu berechnende vielfache Integral.

Wenn man die Reihe der auszuführenden Integrationen mit der Integration in Bezug auf $f_n$ eröffnet, so hat man die Summe der Differentiale $U df_n$ unter der Bedingung zu suchen, dass $f_1$, $f_2, \cdots, f_{n-1}$ unverändert bleiben. Unter dieser Bedingung ist in dem obigen System von linearen Gleichungen

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \ldots, \; df_{n-1} = 0$$

folglich

$$R_{n-1}df_n = R_n dx_n$$

so dass man $df_n$ durch $\frac{R_n}{R_{n-1}}\, dx_n$ ersetzen kann. Folglich ist

$$\int U\, df_1 \, .. \, df_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-1}}\, df_1 \, .. \, df_{n-1}\, dx_n$$

wenn die Grenzen von $x_n$ nach den gegebenen Grenzen von $f_n$ bestimmt werden. Indem man die Entwickelung des so transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf die Variable $f_{n-1}$ beginnt, hat man die Summe der Differentiale $U \frac{R_n}{R_{n-1}}\, df_{n-1}$ zu suchen, während $f_1, f_2, \cdots, f_{n-2}$, $x_n$ unverändert bleiben. Unter dieser Voraussetzung hat man aber

$$df_1 = 0, \ldots, \; df_{n-2} = 0, \quad dx_n = 0$$

mithin folgendes System von $n-1$ linearen Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & f_{11}\, dx_1 + \cdots + f_{1,n-1}\, dx_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & = & f_{n-2,1}dx_1 + \cdots + f_{n-2,n-1}dx_{n-1} \\ df_{n-1} & = & f_{n-1,1}dx_1 + \cdots + f_{n-1,n-1}dx_{n-1} \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich wie oben

$$R_{n-2} df_{n-1} = R_{n-1} dx_{n-1}$$

so dass man $df_{n-1}$ durch $\frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} dx_{n-1}$ und $U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$ durch $U \frac{R_n}{R_{n-2}} dx_{n-1}$ ersetzen kann. Daher ist bei der erforderlichen Begrenzung

$$\int U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_1 \, . \, . \, df_{n-1} dx_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-2}} df_1 \, . \, . \, df_{n-2} dx_{n-1} dx_n$$

Der gefundene Ausdruck für das gesuchte vielfache Integral lässt sich durch analoge Betrachtungen transformiren, indem man zufolge eines Systems von $n-2$ linearen Gleichungen $df_{n-2}$ durch $\frac{R_{n-2}}{R_{n-3}} dx_{n-2}$ ersetzt, wodurch

$$\int U \frac{R_n}{R_{n-2}} df_1 \, . \, . \, df_{n-2} dx_{n-1} dx_n$$

$$= \int U \frac{R_n}{R_{n-3}} df_1 \, . \, . \, df_{n-3} dx_{n-2} dx_{n-1} dx_n$$

wird, u. s. w. Endlich findet man auf demselben Wege

$$\int U \frac{R_n}{R_1} df_1 dx_2 \, . \, . \, dx_n = \int U R_n dx_1 dx_2 \, . \, . \, dx_n$$

indem man zuerst in Bezug auf $f_1$ integrirend vermöge der Bedingungen

$$dx_2 = 0, \quad dx_3 = 0, \ldots, \quad dx_n = 0$$

das Differential $df_1$ durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1$ d. i. $R_1 dx_1$ ersetzt.

10. Wenn $y$ eine gegebene Function von $x$ ist, so liegt der Punct $xy$ auf einer bestimmten Planlinie. Wenn für alle Puncte $xy$ die zweite Fluxion $\frac{d^2y}{dx^2}$ null ist, so ist die Linie gerad oder eine Mehrheit von Geraden. Ausserdem aber ist für den Punct $xy$ Sinn und Grösse der Krümmung der Linie durch Zeichen und Werth der zweiten Fluxion bestimmt. Diesen Bemerkungen, welche bei Erfindung der Differentialrechnung gemacht worden waren, entsprechen folgende Sätze. Wenn $z$ eine gegebene Function von $x$ und $y$ ist,

$$dz = pdx + qdy$$

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix}$$

Sep. 128.

so liegt der Punct $xyz$ auf einer bestimmten Fläche. Wenn für alle Puncte $xyz$ die Functionaldeterminante $rt - s^2$ null ist, so ist die Fläche developpabel, in planum explicabilis*). Ausserdem ist der Punct $xyz$ ein elliptischer, parabolischer, hyperbolischer Punct der Fläche d. h. die Fläche ist daselbst concav-concav (convex-convex), plan-concav (plan-convex), concav-convex, je nachdem $rt - s^2$ positiv, null, negativ, so dass der Gleichung $rt - s^2 = 0$ die parabolischen Puncte der Demarcationslinie entsprechen, welche die elliptischen und die hyperbolischen Puncte der Fläche trennt**). Die Krümmung der gegebenen Fläche in dem Punct $xyz$ derselben (im Gegensatz zu curvatura integra) wird durch dieselbe Functionaldeterminante berechnet oder bei verschiedenen Methoden, die Flächenpuncte zu bestimmen, durch Aequivalente derselben***).

Der gegebenen Fläche wird von Gauss eine Kugel beigeordnet, deren Centrum im Anfang der orthogonalen Coordinaten liegt und deren Radius eine Längeneinheit ist, so dass dem Flächenpunct $xyz$ derjenige Kugelpunct $XYZ$ entspricht, dessen Radius mit der Normale des Flächenpunctes einerlei Richtung hat. Einem Flächendifferential in der Nähe des Punctes $xyz$ entspricht demnach ein paralleles Kugeldifferential in der Nähe des Punctes $XYZ$. Das Verhältniss dieses Kugeldifferentials zu jenem Flächendifferential ist das Mass der Krümmung der Fläche in dem Punct $xyz$. Dasselbe Verhältniss haben die Projectionen der beiden parallelen Flächendifferentiale auf die Ebene $xy$. Die Fläche des Dreiecks der Puncte

$$(x, y, z), \quad (x + dx, y + dy, z + dz), \quad (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$$

---

*) Monge 1775 Mém. prés. t. 9 p. 382. Euler hatte 1771 Nov. Comm. Petrop. t. 16 p. 3 besondre Gleichungen developpabler Flächen gegeben.

**) Meusnier 1776 Mém. prés. t. 10 p. 476. Vergl. Dupin Développements de géométrie 1813 p. 48. Möbius baryc. Calc. §. 107.

***) Gauss Disq. generales circa superf. curvas 1827 (Comm. rec. Gott. VI). Die hier gegebene Form der Rechnung ist in dem Aufsatz des Verf. Leipz. Berichte 1866 p. 1 enthalten.

hat (vergl. unten §. 15) die Projection $\frac{1}{2}(dx\,\delta y - \delta x\,dy)$, während die Fläche des entsprechenden Dreiecks die Projection $\frac{1}{2}(dX\,\delta Y - \delta X\,dY)$ hat. Daher ist die Krümmung der Fläche in dem Punct $xyz$

$$k = \frac{dX\,\delta Y - \delta X\,dY}{dx\,\delta y - \delta x\,dy}$$

Nun sind $X, Y$ wie $z$ bestimmte Functionen von $x, y$, d. h.

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy$$

u. s. w., folglich (§. 6, 1)

$$\begin{vmatrix} dX & \delta X \\ dY & \delta Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{vmatrix}$$

$$k = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

die Functionaldeterminante von $X, Y$ in Bezug auf $x, y$.

11. Wenn $z$ eine gegebene Function von $x$, $y$ ist und ihre Fluxionen in Bezug auf $x$, $y$ durch $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ bezeichnet werden, so hat man

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy$$

$$X : Y : Z : 1 = p : q : -1 : \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

Nun ist (5)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

und in Folge der Werthe

$$X = \frac{p}{R}, \quad Y = \frac{q}{R}, \quad R^2 = p^2 + q^2 + 1$$

findet man (2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \end{vmatrix} = \frac{1}{R^3} \begin{vmatrix} R & \frac{\partial R}{\partial p} & \frac{\partial R}{\partial q} \\ p & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{R^4}$$

also

$$k = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}$$

12. Wenn $f$ eine gegebene Function von $x$, $y$, $z$ ist und ihre Fluxionen durch $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_{11}$, .. bezeichnet werden, so hat man auf der Fläche $f = 0$

$$p = -\frac{f_1}{f_3}, \quad q = -\frac{f_2}{f_3}$$

$$f_3^2(p^2 + q^2 + 1) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{f_3^3} \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ f_3 & \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{f_3^4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ f_1 & f_{11} + f_{13}p & f_{12} + f_{13}q & f_{13} \\ f_2 & f_{12} + f_{23}p & f_{22} + f_{23}q & f_{23} \\ f_3 & f_{13} + f_{33}p & f_{23} + f_{33}q & f_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{f_3^4} \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

also

$$k = \frac{-1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

Anmerkung. Wenn $f$ eine homogene Function der Variablen $x$, $y$, $z$, $w$ von $m$ Dimensionen ist, so hat man auf der Fläche $f = 0$, $w = 1$

$$0 = xf_1 + yf_2 + zf_3 + f_4$$

$$(m-1)f_1 = xf_{11} + yf_{12} + zf_{13} + f_{14}$$

u. s. w., folglich durch Verbindung der Zeilen und der Colonnen

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(m-1)^2} \Sigma \pm f_{11} \cdot\cdot f_{44}$$

Diese Determinante stimmt als Functionaldeterminante der $f_1, .., f_4$ mit der HESSE'schen Determinante von $f$ überein (7).

**13.** Wenn die Coordinaten $x$, $y$, $z$ von den Argumenten $u, v$ abhängen, so hat man

$$dx = x_1 du + x_2 dv, \quad dy = y_1 du + y_2 dv, \quad dz = z_1 du + z_2 dv$$

$$\begin{vmatrix} dx & x_1 & x_2 \\ dy & y_1 & y_2 \\ dz & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = A dx + B dy + C dz = 0$$

folglich

$$p = -\frac{A}{C}, \quad q = -\frac{B}{C}$$

$$C^2(p^2 + q^2 + 1) = A^2 + B^2 + C^2$$

Nun ist (5 und 2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} \\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{C^3} \begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & Ax_1 + By_1 + Cz_1 & Ax_2 + By_2 + Cz_2 \\ C_1 & A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 & A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 \\ C_2 & A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 & A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 \end{vmatrix}$$

Aus den Identitäten

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0, \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0$$

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + Ax_{11} + By_{11} + Cz_{11} = 0$$

u. s. w. folgt aber

$$\begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1x_1 + \cdot\cdot & A_1x_2 + \cdot\cdot \\ A_2x_1 + \cdot\cdot & A_2x_2 + \cdot\cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ax_{11} + \cdot\cdot & Ax_{12} + \cdot\cdot \\ Ax_{12} + \cdot\cdot & Ax_{22} + \cdot\cdot \end{vmatrix}$$

Demnach ist $k(A^2 + B^2 + C^2)^2 = C^4(rt - s^2)$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & x_1 & x_2 \\ y_{11} & y_1 & y_2 \\ z_{11} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{22} & x_1 & x_2 \\ y_{22} & y_1 & y_2 \\ z_{22} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{12} & x_1 & x_2 \\ y_{12} & y_1 & y_2 \\ z_{12} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11}x_{22} + \cdot\cdot & x_1 x_{22} + \cdot\cdot & x_2 x_{22} + \cdot\cdot \\ x_{11}x_1 + \cdot\cdot & x_1 x_1 + \cdot\cdot & x_2 x_1 + \cdot\cdot \\ x_{11}x_2 + \cdot\cdot & x_1 x_2 + \cdot\cdot & x_2 x_2 + \cdot\cdot \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} x_{12}x_{12} + \cdot\cdot & x_1 x_{12} + \cdot\cdot & x_2 x_{12} + \cdot\cdot \\ x_{12}x_1 + \cdot\cdot & x_1 x_1 + \cdot\cdot & x_2 x_1 + \cdot\cdot \\ x_{12}x_2 + \cdot\cdot & x_1 x_2 + \cdot\cdot & x_2 x_2 + \cdot\cdot \end{vmatrix}$$

**14.** Für das Quadrat eines in dem Punct $xyz$ anfangenden Liniendifferentials der Fläche hat man

$$\begin{aligned} & dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ = {} & (p^2+1)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (q^2+1)\,dy^2 \\ = {} & E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \end{aligned}$$

wobei

$$E = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad F = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad G = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

Die Krümmung $k$ ist von Gauss auch durch die Grössen $E$, $F$, $G$ und deren erste und zweite Fluxionen ausgedrückt worden.

Zunächst ist die Determinante der quadratischen Form $E du^2 + \cdot\cdot$ aus der Determinante der Form $(p^2+1)\,dx^2 + \cdot\cdot$ ableitbar (§. 6, 4), folglich

$$EG - F^2 = (p^2 + q^2 + 1)\,C^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Ferner ergiebt die Differentiation nach $u$ und $v$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}E_1 &= x_1 x_{11} + \cdot\cdot & \tfrac{1}{2}G_1 &= x_2 x_{12} + \cdot\cdot \\ \tfrac{1}{2}E_2 &= x_1 x_{12} + \cdot\cdot & \tfrac{1}{2}G_2 &= x_2 x_{22} + \cdot\cdot \\ \tfrac{1}{2}E_{22} &= x_{12}x_{12} + \cdot\cdot + x_1 x_{122} + \cdot\cdot & \tfrac{1}{2}G_{11} &= x_{12}x_{12} + \cdot\cdot + x_2 x_{112} + \cdot\cdot \\ F_1 &= x_2 x_{11} + \cdot\cdot + x_1 x_{12} + \cdot\cdot & F_2 &= x_2 x_{12} + \cdot\cdot + x_1 x_{22} + \cdot\cdot \end{aligned}$$

$$F_{12} = x_{11}x_{22} + \cdot\cdot + x_2 x_{112} + \cdot\cdot + x_{12}x_{12} + \cdot\cdot + x_1 x_{122} + \cdot\cdot$$

$$F_{12} - \tfrac{1}{2}E_{22} - \tfrac{1}{2}G_{11} = x_{11}x_{22} + \cdot\cdot - x_{12}x_{12} - \cdot\cdot$$

Durch Benutzung dieser Werthe erhält man aus dem obenstehenden Ausdruck (13) den folgenden für $k(EG - F^2)^2$:

$$\begin{vmatrix} F_{12} - \tfrac{1}{2}E_{22} - \tfrac{1}{2}G_{11} & F_2 - \tfrac{1}{2}G_1 & \tfrac{1}{2}G_2 \\ \tfrac{1}{2}E_1 & E & F \\ F_1 - \tfrac{1}{2}E_2 & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}E_2 & \tfrac{1}{2}G_1 \\ \tfrac{1}{2}E_2 & E & F \\ \tfrac{1}{2}G_1 & F & G \end{vmatrix}$$

Anmerkung. Liouville (Journ. 16 p. 131) hat $EG-F^2=D^2$ gesetzt und gefunden

$$-kD = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{D}\left(\tfrac{1}{2}G_1 + \tfrac{1}{2}G_2\frac{F}{G} - F_2\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{D}\left(\tfrac{1}{2}E_2 - \tfrac{1}{2}G_1\frac{F}{G}\right)$$

15. Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ von einander unabhängige Functionen von $x_1, x_2, .., x_n$ sind, so sind auch $x_1, x_2, .., x_n$ von einander unabhängige Functionen von $f_1, f_2, .., f_n$. Die Determinante des Systems $f_1, f_2, .., f_n$ und die Determinante des Systems $x_1, x_2, .., x_n$ sind reciprok, d. h. ihr Product ist $= 1$ *).

**Beweis.** Um $f_i$ in Bezug auf $f_k$ zu differentiiren, müsste man $x_1, x_2, .., x_n$ durch $f_1, f_2, .., f_n$ ausdrücken und

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_k} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial f_k}$$

bilden. Diese Summe beträgt aber 0 oder 1, je nachdem $k$ von $i$ verschieden ist oder nicht, weil $f_1, f_2, .., f_n$ von einander unabhängig sind.

Bezeichnet man $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ durch $a_{ik}$, $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ durch $b_{ik}$ und die erwähnte Summe durch $c_{ik}$, bezeichnet man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

durch $R$, $S$, $T$, so ist

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

folglich (§. 6, 1) $T=RS$. Nun ist $c_{ik}$ entweder 0 oder 1, je nachdem $k$ von $i$ verschieden ist oder nicht; folglich $T=1$ (§. 3, 3), d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial x_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial x_n}{\partial f_n} \end{vmatrix} = 1$$

*) Jacobi det. funct. §. 8. Dasselbe Theorem hatte Möbius Crelle J. 12 p. 116 gefunden.

16. Wenn $R$ und $S$ die vorige Bedeutung haben und die Adjuncten von $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ und von $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ in den beiden Systemen durch $\alpha_{ik}$ und $\beta_{ik}$ bezeichnet werden, so ist*)

$$R\frac{\partial x_i}{\partial f_k} = \alpha_{ki} \qquad\qquad S\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki}$$

$$R\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial x_1}{\partial f_m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_m}{\partial f_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial x_m}{\partial f_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$S\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_{m+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_{m+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial x_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}$$

**Beweis.** Nach den angenommenen Bezeichnungen (15) ist

$$\begin{array}{c} a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \cdot\cdot + a_{1n}b_{nk} = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + \cdot\cdot + a_{kn}b_{nk} = 1 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n1}b_{1k} + a_{n2}b_{2k} + \cdot\cdot + a_{nn}b_{nk} = 0 \end{array}$$

Wenn man diese Identitäten der Reihe nach mit

$$\alpha_{1i}, \quad \alpha_{2i}, \quad \cdot\cdot, \quad \alpha_{ni}$$

multiplicirt und dann addirt, so erhält man (§. 3, 2)

$$Rb_{ik} = \alpha_{ki}$$

Ferner ist (§. 7, 2)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\cdot & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \cdot\cdot & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1}\begin{vmatrix} \alpha_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & \alpha_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \alpha_{n,m+1} & \cdot\cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Durch Substitution der eben gefundenen Werthe von $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mm}$ erhält man auf der linken Seite (§. 3, 4)

$$R^m\begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot\cdot & b_{mm} \end{vmatrix}$$

*) Jacobi det. funct. §. 8 und 9.

und damit den Inhalt der zweiten Behauptung. Die übrigen Behauptungen folgen aus den bewiesenen, indem man gleichzeitig $f$ mit $x$, $R$ mit $S$ vertauscht.

17. Wenn $t$ eine Grösse bedeutet, von welcher $f_1, f_2, .., f_n$ auf gegebene Weise abhängen, so kann man die Fluxionen

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad .., \quad \frac{\partial f_n}{\partial t}$$

welche zunächst Functionen von $x_1, x_2, .., x_n$ sind, von den Variablen $f_1, f_2, .., f_n$ abhängig machen, um sie in Bezug auf diese Variablen zu differentiiren. Die Functionaldeterminante $R$ (15 und 16), welche zunächst eine Function von $x_1, x_2, .., x_n$ ist, kann ebenfalls durch $f_1, f_2, .., f_n$ ausgedrückt und dann nach $t$ differentiirt werden. Wenn andererseits $u$ eine Variable bedeutet, von welcher $x_1, x_2, .., x_n$ auf gegebene Weise abhängen u. s. w., so ist nach den angenommenen Bezeichnungen*)

$$\frac{\partial}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + .. + \frac{\partial}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{\partial \log R}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_1}\left(S\frac{\partial f_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial f_2}\left(S\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) + .. + \frac{\partial}{\partial f_n}\left(S\frac{\partial f_n}{\partial t}\right) = 0$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u} + .. + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u} = \frac{\partial \log S}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R\frac{\partial x_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R\frac{\partial x_2}{\partial u}\right) + .. + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(R\frac{\partial x_n}{\partial u}\right) = 0$$

Insbesondere ist**)

$$\frac{\partial \beta_{k1}}{\partial f_1} + \frac{\partial \beta_{k2}}{\partial f_2} + .. + \frac{\partial \beta_{kn}}{\partial f_n} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{k2}}{\partial x_2} + .. + \frac{\partial \alpha_{kn}}{\partial x_n} = 0$$

**Beweis.** Nach §. 3, 15 hat man

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \sum_{ik} \alpha_{ik}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}$$

---

*) Jacobi det. funct. §. 9. Vergl. Jacobi Crelle J. 27 p. 209.

**) Jacobi Crelle J. 27 p. 203.

worin nach (11)

$$\alpha_{ik} = R \frac{\partial x_k}{\partial f_i} \qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\, \partial x_k}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t\, \partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_i} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\, \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_i} + \ldots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\, \partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial f_i} = \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

folglich

$$\frac{\partial R}{\partial t} = R \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} \qquad \frac{\partial \log R}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

Ferner ist $RS = 1$ (15), also $\log R + \log S = 0$, und

$$0 = \frac{\partial \log S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

Da die Functionaldeterminante $S$ eine Function der Grössen $f_1$, $f_2$, .., $f_n$ ist, welche die Variable $t$ enthalten, so hat man

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial S}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial t}$$

Nimmt man hinzu, dass

$$\frac{\partial S}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + S \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial f_i} \left( S \frac{\partial f_i}{dt} \right)$$

ist, so erhält man die zweite der aufgestellten Identitäten. Die analogen Identitäten ergeben sich durch gleichzeitige Vertauschung von $t$ mit $u$, $f$ mit $x$, $R$ mit $S$.

Wenn insbesondere $t = x_k$, so ist (16)

$$S \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki} \quad \text{u. s. w.}$$

18. Wenn $X$, $X_1$, .., $X_n$ gegebene Functionen von $x, x_1$.., $x_n$ bedeuten, $f$ eine unbestimmte Function derselben Variablen und

$$\psi(f) = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ist; wenn ferner $n$ von einander unabhängige Lösungen der linearen partialen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$ durch $f_1$, $f_2$, .., $f_n$ bezeichnet werden, so dass $\psi(f_1)$, $\psi(f_2)$, .., $\psi(f_n)$ identisch verschwinden: so lässt sich ein Multiplicator $M$ angeben, durch wel-

chen $\psi(f)$ zur Determinante der Functionen $f, f_1, .., f_n$ wird. Es ist nämlich

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = A\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + .. + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

folglich $M\psi(f) = R$, wenn $M = A_i : X_i$. In der That verschwinden $R$ und $\psi(f)$, wenn für $f$ eine der Functionen $f_1, f_2, ..$ gesetzt wird. Zufolge der in (17) bewiesenen Eigenschaft der Adjuncten $A, A_1, .., A_n$ ist der Multiplicator $M$ eine Lösung der linearen partialen Differentialgleichung *)

$$\frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x_1} + .. + \frac{\partial(\mu X_n)}{\partial x_n} = 0$$

Anmerkung. Die durch $M$ bezeichnete Function der Grössen $x, x_1, .., x_n$ wird nach Jacobi (l. c.) der Multiplicator der partialen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$, oder der partialen Differentialgleichung

$$0 = X - X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} - .. - X_n\frac{\partial x}{\partial x_n}$$

oder des Systems von gemeinen Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : .. : dx_n = X : X_1 : X_2 : .. : X_n$$

genannt, weil die Auflösungen jener partialen Differentialgleichungen und dieses Systems gemeiner Differentialgleichungen im engsten Zusammenhange stehen. Ist nämlich $\pi$ eine Lösung der Gleichung $\psi(f) = 0$ und $x$ dadurch von $x_1, x_2, .., x_n$ abhängig gemacht, dass man $\pi$ einer willkürlichen Constante gleichgesetzt hat, so hat man

$$0 = X\frac{\partial \pi}{\partial x} + X_1\frac{\partial \pi}{\partial x_1} + .. + X_n\frac{\partial \pi}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_i} = 0$$

---

*) Jacobi Crelle J. 27 p. 210. Vergl. dessen Vorlesungen über Dynamik. Malmstèn Liouv. J. 1862 p. 257.

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} : \frac{\partial \pi}{\partial x_1} : \frac{\partial \pi}{\partial x_2} : \ldots = 1 : -\frac{\partial x}{\partial x_1} : -\frac{\partial x}{\partial x_2} : \ldots$$

$$0 = X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - \ldots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}$$

Sind andrerseits $f_1, f_2, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Lösungen der Gleichung $\psi(f) = 0$ und willkürlichen Constanten gleichgesetzt, so hat man

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} d + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} dx + \frac{\partial f_n}{dx_1} \partial x_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n = 0$$

und durch Auflösung dieses linearen Systems

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots = A : A_1 : A_2 : \ldots$$
$$= X : X_1 : X_2 : \ldots$$

## §. 13. Die homogenen Functionen, insbesondere die quadratischen Formen.

1. Wenn $u$ eine homogene Function der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von $m$ Dimensionen ist, wenn man $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ durch $u_i$ bezeichnet, so ist nach Euler's Theorem*) identisch

$$mu = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n$$

Indem man denselben Satz auf die homogenen Functionen $u_1$, $u_2, \ldots,$ von $m - 1$ Dimensionen anwendet und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ durch $u_{ik}$ bezeichnet, erhält man das System von Identitäten

$$(m-1) u_1 = u_{11} x_1 + \ldots + u_{n1} x_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(m-1) u_n = u_{1n} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n$$

2. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist**)

$$m(m-1)u = \Sigma x_i x_k u_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

---

*) Mechanica 1736 tom. II, §. 106. 497. Calc. diff. §. 225,

**) Lacroix Calc. diff. §. 292.

Wenn man nämlich die obigen Identitäten der Reihe nach mit $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ multiplicirt und addirt, so findet man auf der rechten Seite die angegebene Summe, weil $u_{ik} = u_{ki}$, und auf der linken Seite $m(m-1)u$ nach (1).

Alle diese Ausdrücke der homogenen Function durch ihre ersten, zweiten, .. Fluxionen ergeben sich, wenn man die Identität

$$f(x_1 + \omega x_1, x_2 + \omega x_2, \ldots, x_n + \omega x_n) = (1 + \omega)^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nach steigenden Potenzen von $\omega$ entwickelt.

3. In Folge der in (1) gegebenen Identitäten ist (§. 8)

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1} u & u_1 & \cdot\cdot & u_n \\ u_1 & u_{11} & \cdot\cdot & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \cdot\cdot & u_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

nach Weglassung des Factor $m-1$ in der ersten Colonne (§. 3, 4). Diese identisch verschwindende Determinante $(n+1)$ten Grades kann nach §. 5, 5 entwickelt werden. Bezeichnet man die Hesse'sche Determinante von $u$ (§. 12, 7) durch $v = \Sigma \pm u_{11} \ldots u_{nn}$ und die Adjuncte von $u_{ik}$ in $v$ durch $\alpha_{ik}$, so ist $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, weil $u_{ik} = u_{ki}$ (§. 3, 5), und man erhält*)

$$\frac{mu}{m-1} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdot \\ u_{21} & u_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdot \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdot \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \frac{m}{m-1} uv - \sum_{ik} u_i u_k \alpha_{ik} = 0.$$

4. Aus dem System (1)

$$\begin{array}{rccccl} -(m-1) \frac{mu}{m-1} & + u_1 \, x_1 & + & \cdot\cdot & + u_n \, x_n & = 0 \\ -(m-1) \quad u_1 & + u_{11} x_1 & + & \cdot\cdot & + u_{n1} x_n & = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(m-1) \quad u_n & + u_{1n} x_1 & + & \cdot\cdot & + u_{nn} x_n & = 0 \end{array}$$

folgt nach §. 8, 2 die Proportion

$$-(m-1) : x_1 : x_2 : \ldots = \beta_i : \beta_{1i} : \beta_{2i} : \ldots$$

*) Hesse Crelle J. 38 p. 242.

wenn die Adjuncten der Elemente $\frac{mu}{m-1}$, $u_i$, $u_{ik}$ in der verschwindenden Determinante $(n+1)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1} & u_1 & \cdot\cdot & u_n \\ u_1 & u_{11} & \cdot\cdot & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \cdot\cdot & u_{nn} \end{vmatrix}$$

der Reihe nach durch $v$, $\beta_i$, $\beta_{ik}$ bezeichnet werden. Nun ist $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ (§. 3, 5), $\beta_i^2 = v\beta_{ii}$ (§. 3, 8), folglich

$$-\frac{x_i}{m-1} = \frac{\beta_{ii}}{\beta_i} = \frac{\beta_i}{v}$$

$$\frac{x_i x_k}{(m-1)^2} = \frac{\beta_{ii}\beta_{ik}}{\beta_i^2} = \frac{\beta_{ik}}{v} \text{ *)}$$

Wenn daher in dem System mit identisch verschwindender Determinante $R$ irgend eine Subdeterminante $n$ten Grades, namentlich die Determinante $v$, identisch verschwindet, so verschwinden auch die übrigen Subdeterminanten desselben Grades.

5. Die bewiesenen Relationen leisten einen wichtigen Dienst in der Theorie der Krümmung von Linien und Flächen. Wenn $f$ eine Function der orthogonalen Coordinaten $x$, $y$ eines Punctes ist, also $f = 0$ die Gleichung der Linie ist, auf welcher der Punct $xy$ liegt; wenn ferner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} = f_{21}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$$

gesetzt wird, so ist bekanntlich

$$x - \xi : y - \eta = f_1 : f_2$$

die Gleichung für die Normale der Linie $f = 0$ durch den Punct $xy$ derselben, wobei $\xi$, $\eta$ die Coordinaten irgend eines Punctes der Normale bedeuten. Setzt man

$$\lambda(x - \xi) = f_1, \qquad \lambda(y - \eta) = f_2$$

*) Hiermit stimmen die von HESSE (Crelle J. 28 p. 103 und 38 p. 242) gegebenen Relationen überein.

und differentiirt diese Gleichungen, so erhält man

$$f_1 dx + f_2 dy = 0$$

$$(x-\xi)d\lambda + \lambda dx = df_1, \qquad (y-\eta)d\lambda + \lambda dy = df_2$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx, \qquad f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$

für die Normale der Linie $f=0$ durch den Punct $(x+dx, y+dy)$, welche mit der ersten Normale den Punct $\xi\eta$ gemein hat, d. i. das Centrum der Krümmung, welche die Linie $f=0$ im Puncte $xy$ hat. Aus dem System

$$\begin{aligned} 0 &= f_1\, dx + f_2\, dy \\ f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11}-\lambda)\, dx + f_{12} dy \\ f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{21}\, dx + (f_{22}-\lambda)\, dy \end{aligned}$$

folgt (§. 8)

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_1 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

zur Bestimmung von $\lambda$. Wenn man diese Gleichung nach §. 5, 5 entwickelt, so erhält $\lambda$ den Coefficienten $f_1{}^2 + f_2{}^2$ und das von $\lambda$ unabhängige Glied ist

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$\lambda = \frac{-L}{f_1{}^2 + f_2{}^2}$$

Endlich hat man zur Berechnung des Radius der Krümmung, der durch $\varrho$ bezeichnet wird,

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{f_1{}^2 + f_2{}^2}{\lambda^2}$$

und zur Berechnung der Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{-L}{(f_1{}^2 + f_2{}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Determinante $L$ ist leichter zu behandeln, wenn die Function, auf welche sie sich bezieht, homogen ist. Versteht man unter $u$ die homogene Function der Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$, welche mit $f$ identisch wird, wenn $x_3 = 1$, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_1 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2}$$

worin $v = \Sigma \pm u_{11} u_{22} u_{33}$ und nach der Differentiation $x_3 = 1$ zu setzen ist.

Der Punct der Linie $f = 0$ (oder $u = 0$), in welchem die Krümmung verschwindet, ist ein Wendepunct der Linie (im weitern Sinn). Dazu genügt die Gleichung $L = 0$ (oder $v = 0$), wenn $f_1{}^2 + f_2{}^2$ nicht null, der Punct kein singulärer (ein einfacher) ist. Also gehören die Wendepuncte zu den gemeinschaftlichen Puncten der Linien $f = 0$ (oder $u = 0$) und $L = 0$ (oder $v = 0$). Nun sind $f$ und $u$ nach Voraussetzung $m$ten Grades, $v$ aber $3(m-2)$ten Grades, folglich haben die gedachten Linien $3m(m-2)$ gemeinschaftliche Puncte, die im Allgemeinen Wendepuncte der Linie $f = 0$ sind, d. h. eine Linie $m$ter Ordnung ohne singuläre Puncte hat $3m(m-2)$ Wendepuncte*).

6. Wenn $f$ eine Function der orthogonalen Coordinaten $x$, $y$, $z$ eines Punctes, also $f = 0$ die Gleichung der Fläche ist, auf welcher der Punct $xyz$ liegt, so sind nach den vorigen Bezeichnungen

$$x - \xi : y - \eta : z - \zeta = f_1 : f_2 : f_3$$

die Gleichungen für die Normale der Fläche $f = 0$ durch den Punct $xyz$, wofür

$$\lambda(x - \xi) = f_1, \quad \lambda(y - \eta) = f_2, \quad \lambda(z - \zeta) = f_3$$

gesetzt werden kann. Die Normalen der Fläche $f = 0$ durch die Puncte $(x, y, z)$ und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ schneiden sich im Allgemeinen nicht, sondern nur dann, wenn der zuletzt genannte Punct auf einer durch $xyz$ gehenden Krümmungslinie —*

*) Dieser Satz ist 1834 von Plücker (Crelle J. 12 p. 105, System 1835 p. 264) aufgestellt worden. Der hier mitgetheilte Beweis rührt von Hesse (l. c.) her. Einen andern Beweis findet man bei Jacobi (Crelle J. 40 p. 254).

* Duhamel. II p 479

liegt *). Ihr Durchschnitt $\xi\eta\zeta$ ist das Krümmungscentrum eines Hauptschnitts der Fläche für den Punct $xyz$. Durch Differentiation der obigen Gleichungen findet man für diesen Fall

$$(x-\xi)\,d\lambda + \lambda dx = df_1, \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx$$

$$f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$

$$f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_3 - \lambda dz$$

Folglich (§. 8) ist

$$\begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ f_3 & df_3 & dz \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung, welche in Verbindung mit der Differentialgleichung der gegebenen Fläche

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = 0$$

die durch den Punct $xyz$ gehenden Krümmungslinien bestimmt. Aus dem System der Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz \\ f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11}-\lambda)\, dx + f_{12}\, dy + f_{13}\, dz \\ f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{12}\, dx + (f_{22}-\lambda)\, dy + f_{23}\, dz \\ f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{13}\, dx + f_{23}\, dy + (f_{33}-\lambda)\, dz \end{aligned}$$

folgt zur Bestimmung von $\lambda$

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

---

*) Bei genauer Infinitesimalbetrachtung findet man (Scheibner briefl. Mittheilung), dass in diesem Falle der Abstand der Normalen ein Unendlichkleines 3ter Ordnung ist, während der Abstand der Fusspuncte zu den Unendlichkleinen 1ter Ordnung gehört. Vergl. Bouquet Liouv. J. 11 p. 125.

Diese Gleichung ist zweiten Grades, und zwar hat $\lambda^2$ den Coefficienten $-f_1^2-f_2^2-f_3^2$, während das von $\lambda$ unabhängige Glied

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Bezeichnet man die Wurzeln derselben Gleichung durch $\lambda'$, $\lambda''$, so hat man

$$\lambda' \lambda'' = \frac{-L}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}$$

Wenn man endlich den Abstand des Punctes $\xi\eta\zeta$ von $xyz$ durch $\varrho$ bezeichnet, so ist

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

$$\lambda\varrho = \sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}$$

Demnach hat auch $\varrho$ zwei Werthe $\varrho'$, $\varrho''$, so dass

$$\lambda'\lambda''\varrho'\varrho'' = f_1^2+f_2^2+f_3^2$$

Die reciproken Werthe von $\varrho'$ und $\varrho''$ sind aber die Krümmungen der durch $xyz$ gehenden Krümmungslinien und der von ihnen berührten Hauptschnitte der Fläche, also ist das Product der Hauptkrümmungen der Fläche $f=0$ in dem Puncte $xyz$

$$\frac{1}{\varrho'\varrho''} = \frac{-L}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^2} \text{ (vergl. §. 12, 12)}$$

Versteht man unter $u$ die homogene Function der Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, welche bei $x_4=1$ mit $f$ zusammenfällt, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2}$$

Die Puncte der Fläche $f=0$ oder $u=0$, für welche $L$ oder $v$ verschwindet, sind parabolische Puncte der Fläche (§. 12, 10), und liegen auf der Demarcationslinie ($f=0$, $L=0$) oder ($u=0$, $v=0$), welche die elliptischen Puncte der Fläche von den hyperbolischen trennt. Nun sind $f$ und $u$ nach Voraussetzung $m$ten Grades, $v$ aber $4(m-2)$ten Grades, also ist die Demarca-

**tionslinie einer Fläche $m$ter Ordnung eine Linie $m \times 4(m-2)$ter Ordnung*)**.

7. Aus den in (1) gegebenen Identitäten hat Jacobi**), veranlasst durch einen von Hesse mitgetheilten Satz, folgendes die mehr erwähnte Determinante

$$v = \Sigma \pm u_{11} \ldots u_{nn}$$

betreffende System von Identitäten entwickelt. Zunächst ist wie §. 8

$$\text{(I)} \qquad v x_i = (m-1)(\alpha_{1i} u_1 + \ldots + \alpha_{ni} u_n)$$

wenn $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ wie oben (3) die Adjuncte von $u_{ik} = u_{ki}$ in $v$ bedeutet. Indem man diese Identität in Bezug auf $x_i$ oder $x_k$ differentiirt und zur Abkürzung

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = v_k$$

setzt, erhält man

$$\text{(II)} \qquad v_i x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_i} u_1 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_i} u_n\right) + (m-2)\, v$$

$$v_k x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_k} u_1 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_k} u_n\right)$$

weil (§. 3, 2)

$$\alpha_{1i} u_{1i} + \ldots + \alpha_{ni} u_{ni} = v$$

$$\alpha_{1i} u_{1k} + \ldots + \alpha_{ni} u_{nk} = 0$$

Durch abermalige Differentiation der gefundenen Identitäten, wobei

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} = v_{kl}$$

gesetzt ist, erhält man

$$\text{(III)} \qquad v_{ik} x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_i \partial x_k} u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_i \partial x_k} u_n\right)$$

$$- (m-1)\left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k}\right) + (m-2)\, v_k$$

$$v_{kl} x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_k \partial x_l} u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_k \partial x_l} u_n\right)$$

$$- (m-1)\left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{nl}}{\partial x_k}\right)$$

---

*) Hesse l. c.

**) Crelle J. 40 p. 318.

indem man die Differentiation der Identitäten

$$\alpha_{1i}u_{1i} + \ldots + \alpha_{ni}u_{ni} = v$$
$$\alpha_{1i}u_{1l} + \ldots + \alpha_{ni}u_{nl} = 0$$

in Bezug auf $x_k$ zu Hülfe nimmt.

8. Bei einem System von Werthen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welches den nicht unbedingt zulässigen Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \ldots, \quad u_n = 0$$

genügt, verschwinden zugleich die Functionen $u$ und $v$ (1), sowie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (7, II). Daraus erkennt man, dass ein Doppelpunct der Linie $u=0$ auf der Linie $v=0$ liegt und ein Doppelpunct (bei vereinten Tangenten ein 3facher Punct) derselben ist, dass also nicht alle gemeinschaftlichen Puncte der Linien $u=0$, $v=0$ Wendepuncte der Linie $u=0$ sein müssen.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= u_{11}x_1 + \ldots + u_{n1}x_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 &= u_{1n}x_1 + \ldots + u_{nn}x_n \end{aligned}$$

folgt aber (§. 8, 2 und §. 3, 8), wenn $\alpha_{ik}$ die angegebene Bedeutung hat,

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = \alpha_{1i} : \alpha_{2i} : \alpha_{3i} : \ldots$$
$$\frac{x_1^2}{\alpha_{11}} = \frac{x_2^2}{\alpha_{22}} = \ldots = \frac{1}{N}$$
$$Nx_ix_k = \alpha_{ik}$$

Durch diese Substitutionen erhält man in (7, III)

$$v_{ik}x_i = -(m-1)\,Nx_i\left(x_1\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_n}\right)$$

d. i. nach (1)

$$v_{ik} = -(m-1)(m-2)\,Nu_{ik}$$

folglich*)

$$v_{11} : v_{12} : \ldots : v_{22} : \ldots = u_{11} : u_{12} : \ldots : u_{22} : \ldots$$

weshalb auch die Determinante $\Sigma \pm v_{11} \ldots v_{nn}$ verschwindet.

Die Geraden, welche die Linie $u=0$ in ihrem Doppelpunct berühren, werden durch die Proportion der nicht verschwinden-

*) Hesse Crelle J. 40 p. 316. Vergl. Jacobi l. c.

den Differentialquotienten bestimmt. Man erkennt also, dass die Geraden, welche die Linie $u=0$ in einem Doppelpunct berühren, zugleich die Linie $v=0$ daselbst berühren. Ein Doppelpunct der Linie $u=0$ enthält demnach $2\times 2+2$ (bei vereinten Tangenten $2\times 3+2$) gemeinschaftliche Puncte der Linien $u=0$, $v=0$, welche nicht Wendepuncte der Linie $u=0$ sind. PLÜCKER System 1835 p. 266.

9. Die homogene Function $u$ von $m$ Dimensionen wird, wenn sie ganz ist und ganze Coefficienten hat, eine Form $m$ten Grades (linear, quadratisch, cubisch u. s. w.) von $n$ unbestimmten Variablen (binär, ternär u. s. w.) genannt*). Eine quadratische Form (häufig »Form« schlechthin) kann durch

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$$

eine cubische Form durch

$$\sum_{ikl} a_{ikl} x_i x_k x_l \text{**)}$$

dargestellt werden, wobei $i$, $k$, $l$ alle Werthe von 1 bis $n$ erhalten und die Grössen $a_{ik}$, $a_{ikl}$ durch Umstellung ihrer Nummern keine Veränderung erleiden. Unter der Determinante einer quadratischen Form versteht man die Determinante des Systems ihrer Coefficienten. Ist $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} = R$, so heisst $R$ die Determinante der Form $u = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$ (bei GAUSS $-R$).

Wenn $\alpha_{ik}$ die Adjuncte von $a_{ik}$ in dem System der Coefficienten bedeutet, so heisst die quadratische Form

$$U = \sum_{ik} \alpha_{ik} y_i y_k$$

(bei GAUSS $-U$) der Form $u$ adjungirt***). Nach §. 7, 1 hat man

$$\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn} = R^{n-1}$$

d. h. die Determinante der adjungirten Form ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante der Form.

---

*) GAUSS Disquis. arithm. art. 153 und 266.

**) Vergl. HESSE Crelle J. 28 p. 74.

***) Forma adjuncta. GAUSS l. c. 267.

Die adjungirte Form $U$ und die Form $u$ können als Determinanten dargestellt werden. Nach §. 5, 5 hat man

$$-U = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & \cdot\cdot & y_n \\ y_1 & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nach derselben Entwickelungsregel ist

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdot\cdot & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & \cdot\cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ x_n & \alpha_{n1} & \cdot\cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = -\Sigma x_i x_k A_{ik}$$

wenn $A_{ik}$ die Adjuncte von $\alpha_{ik}$ in dem System der Coefficienten $\alpha$ bedeutet. Nun ist $A_{ik} = R^{n-2} a_{ik}$ (§. 7, 2), folglich*).

$$-R^{n-2}u = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdot\cdot & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & \cdot\cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ x_n & \alpha_{n1} & \cdot\cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

10. Die Form $u = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ wird durch $u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$ ausgedrückt, so dass

$$u_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n$$

den halben Differentialquotienten von $u$ in Bezug auf $x_i$ bedeutet (1). Wenn die Determinante der Form verschwindet, so sind $u_1, \ldots, u_n$ bei beliebigen $x$ durch eine homogene lineare Gleichung

$$u_1 c_1 + \cdots + u_n c_n = 0$$

verbunden, deren Coefficienten sich verhalten wie die Adjuncten einer Colonne (Zeile) des Systems $a$. Unter der Voraussetzung, dass $c_s$ nicht null ist, geht die Form durch die Vertauschung von $x_i$ mit

$$x_i - c_i \frac{x_s}{c_s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

über in eine Form von $n-1$ Unbestimmten (§. 8, 2. §. 12, 7). In der That ist $a_{i1} c_1 + \cdots + a_{in} c_n = 0$, daher

*) Brioschi Det. (58).

$$u_i = a_{i1}\left(x_1 - c_1 \frac{x_s}{c_s}\right) + \ldots + a_{i,n-1}\left(x_{n-1} - c_{n-1} \frac{x_s}{c_s}\right)$$

$$u = u_1\left(x_1 - c_1 \frac{x_s}{c_s}\right) + \ldots + u_{n-1}\left(x_{n-1} - c_{n-1} \frac{x_s}{c_s}\right)$$

Dabei ist die adjungirte Form $\Sigma \alpha_{ik} y_i y_k$ ein Quadrat (§. 5, 7). Die quadratischen Formen von $n$ Variablen mit verschwindender Determinante werden als singuläre ausgeschieden von den ordinären mit nicht verschwindender Determinante, welche als Formen von weniger Variablen sich nicht darstellen lassen.

**Beispiel.** $u = x^2 + y^2 + 9z^2 + 6yz - 6xz - 2xy + 2xt - 4zt$
In dem System

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{matrix}$$

hat die erste Zeile die Adjuncten $-4, 2, -2, 0$. Die Determinante von $u$ ist null, also kann $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0$ gesetzt werden, und man findet nach den angezeigten Vertauschungen

$$\begin{aligned} u &= (y + \tfrac{1}{2}x)^2 + 9(z - \tfrac{1}{2}x)^2 + 6(y + \tfrac{1}{2}x)(z - \tfrac{1}{2}x) - 4(z - \tfrac{1}{2}x)t \\ &= (x + 2y)^2 + 9(z + y)^2 + 6(x + 2y)(z + y) + 2(x + 2y)t - 4(z + y)t \\ &= (x - 2z)^2 + (y + z)^2 - 2(x - 2z)(y + z) + 2(x - 2z)t \end{aligned}$$

durch 3 Unbestimmte ausgedrückt.

11. Eine ordinäre quadratische Form von $n$ Variablen lässt sich durch $n$ Quadrate linearer Formen ihrer Variablen darstellen *).

Wenn $a_{ii}$ nicht null ist, so ist

$$u = a_{ii} x_i^2 + 2 x_i p + u'$$

wobei die lineare Form $p$ und die quadratische Form $u'$ die Variable $x_i$ nicht enthalten; folglich

$$a_{ii} u = (a_{ii} x_i + p)^2 + a_{ii} u' - p^2$$

Wenn aber alle $a_{ii}$ null sind und $a_{ik}$ nicht null ist, so hat man

*) Lagrange 1759 Misc. Taur. 1 p. 18. Mécanique t. 1, III. Gauss Disq. arithm. 271. Theoria comb. observ. 31 (Comm. Gött. 1819).

$$u = 2a_{ik}x_ix_k + 2x_iq + 2x_kp + u''$$

wobei $p$, $q$, $u''$ die beiden Variablen $x_i$, $x_k$ nicht enthalten; folglich

$$2a_{ik}u = 4(a_{ik}x_i+p)(a_{ik}x_k+q) + 2a_{ik}u'' - 4pq$$
$$= (a_{ik}x_i+p+a_{ik}x_k+q)^2 - (a_{ik}x_i+p-a_{ik}x_k-q)^2 + 2a_{ik}u'' - 4pq$$

In dem ersten Falle besteht die Form $u$ aus einem Quadrat und einer quadratischen Form von $n-1$ Variablen, in dem zweiten Falle besteht sie aus 2 Quadraten und einer quadratischen Form von $n-2$ Variablen. Von den übrigen Formen können wiederum Quadrate abgelöst werden, u. s. w.

Wenn $\Sigma a_{ik}x_ix_k = \alpha_1 y_1^2 + \cdot\cdot + \alpha_n y_n^2$ und $\varepsilon$ die Determinante der linearen Formen $y_1, .., y_n$ ist, so hat die Determinante $\alpha_1\alpha_2..\alpha_n$ der transformirten Form zu der Determinante $\Sigma \pm a_{11}..a_{nn}$ der gegebenen Form das Verhältniss $\varepsilon^2$ (§. 6, 4).

12. Bei allen Ausdrücken einer gegebenen ordinären quadratischen Form von $n$ Variablen durch $n$ Quadrate ergiebt sich dieselbe Anzahl Quadrate eines Zeichens*). Es sei z. B.

$$u = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 + \alpha_4 y_4^2$$
$$= \beta_1 z_1^2 + \beta_2 z_2^2 + \beta_3 z_3^2 + \beta_4 z_4^2$$
$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdot\cdot - \beta_1 z_1^2 - \beta_2 z_2^2 - \cdot\cdot = 0$$

so dass sowohl $y_1, .., y_4$, als auch $z_1, .., z_4$ lineare Formen von $x_1, .., x_4$ mit realen Coefficienten sind, deren Determinanten nicht verschwinden. Unter den Coefficienten $\alpha_1, .., \alpha_4$ sei einer z. B. $\alpha_4$ negativ, die übrigen seien positiv: dann ist unter den Coefficienten $\beta_1, .., \beta_4$ einer negativ, die übrigen sind positiv. Wären z. B. $\beta_3$ und $\beta_4$ negativ, so berechne man $x_1, .., x_4$, welche dem System $y_4 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ genügen. Diesen (ein- oder mehrfach unbestimmten) Werthen entsprechen $y_1$, $y_2$, $y_3$, $z_3$, $z_4$, welche nicht alle null sind, weil den Systemen $y_1 = 0$,

*) Sylvester hat diesen Satz entdeckt und unter dem Namen »Trägheitsgesetz der quadratischen Formen« bekannt gemacht Philos. Mag. 1852, II p. 140 und 1853 p. 481. Jacobi hat denselben Satz 1847 gekannt aber nicht veröffentlicht. Vergl. den nachgelassenen Aufsatz Jacobi's Crelle J. 53 p. 275 nebst den Mittheilungen von Hermite und Borchardt a. a. O. p. 271 und 281. Durch Beziehungen zwischen den Coefficienten $\alpha$ und $\beta$ ist der Beweis von Brioschi geführt worden Nouv. Ann. 1856 Juli.

$y_2=0$, $y_3=0$, $y_4=0$ und $z_1=0$, $z_2=0$, $z_3=0$, $z_4=0$ nur verschwindende $x_1, .., x_4$ genügen (§. 8, 2). Also ist

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 - \beta_3 z_3^2 - \beta_4 z_4^2$$

positiv, nicht null gegen die Voraussetzung.

Demnach hat man unter den ordinären quadratischen Formen von $2m$ und von $2m+1$ Variablen diejenigen in eine Species zu vereinen, welche durch Quadrate ausgedrückt werden, von denen $k$ eines Zeichens, die übrigen anderes Zeichens sind; entsprechend der Anzahl $k=0, 1, .., m$ giebt es $m+1$ Species, abwechselnd mit positiven und mit negativen Determinanten, z. B. 2 Species binärer und ternärer, 3 Species quaternärer und quinärer quadratischer Formen, u. s. w. Die Formen erster Species sind von Gauss Disq. arithm. 271 definit (unfähig im realen Gebiet das Zeichen zu wechseln, also entweder positiv oder negativ), alle andern Formen ohne Unterschied indefinit genannt worden.

Anmerkung. Wenn $y_1, .., y_4$ lineare Formen der $x_1, .., x_4$ sind, so sind die Figuren der entsprechenden Puncte $y$ und $x$ collinear (homographisch). Aus dem Obigen folgt nun, dass man die ordinären Linien 2ter Ordnung in 2 Species, imaginäre, reale (Ellipse, Hyperbel, Parabel), die ordinären Flächen 2ter Ordnung in 3 Species, imaginäre, elliptische (Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid), hyperbolische (Hyperboloid, Paraboloid) zu vertheilen hat, dergestalt dass zwei Linien oder Flächen derselben Species collineare Figuren sind. Vergl. Möbius baryc. Calc. p. 314. Jacobi a. a. O. p. 280.

13. Wenn bei den Werthen $x_1=c_1, .., x_n=c_n$, unter denen einer z. B. $c_n$ nicht null ist, die Form $u=0$ wird, so ist sie entweder indefinit oder singulär*).

**Beweis.** Durch die Substitution

$$x_1 = c_1 \frac{x_n}{c_n} + y_1, \quad .., \quad x_{n-1} = c_{n-1} \frac{x_n}{c_n} + y_{n-1}$$

erhält man

---

*) Kronecker Monatsbericht der Berl. Acad. 1868 p. 339.

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = \Sigma a_{ik}\left(c_i \frac{x_n}{c_n} + y_i\right)\left(c_k \frac{x_n}{c_n} + y_k\right)$$
$$= \frac{x_n^2}{c_n^2} \Sigma a_{ik} c_i c_k + 2 \frac{x_n}{c_n} \Sigma a_{ik} c_i y_k + \Sigma a_{ik} y_i y_k$$

Davon ist das erste Glied $= 0$ nach der Voraussetzung. Wenn es nun Werthe $y_1, \ldots, y_{n-1}$ giebt, bei denen $\Sigma a_{ik} c_i y_k$ nicht verschwindet, so kann man den Werth von $x_n$ so verändern, dass die Form Werthe von entgegengesetzten Zeichen erhält. Wenn aber $\Sigma a_{ik} c_i y_k$ bei allen Werthen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ verschwindet, so hängt die gegebene Form von nicht mehr als $n - 1$ Variablen ab; in der That verschwinden nicht nur die Summen $\Sigma a_{i1} c_i, \ldots, \Sigma a_{i,n-1} c_i$, sondern in Folge der Voraussetzung $\Sigma a_{ik} c_i c_k = 0$ ist auch $\Sigma a_{in} c_i = 0$, also verschwindet $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$.

Man schliesst hiernach, dass die ordinäre Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ definit nicht sein kann, wenn die Coefficienten $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ nicht alle von Null verschieden und nicht alle von einerlei Zeichen sind.

14. Wenn man aus zwei gegebenen ordinären quadratischen Formen derselben Variablen

$$\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \qquad \psi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$$

mittelst willkürlicher Multiplicatoren die Form $u\varphi + v\psi$ und insbesondere die Formen

$$\varphi' = u_1 \varphi + v_1 \psi, \qquad \psi' = u_2 \varphi + v_2 \psi$$

ableitet, so können alle Formen $u\varphi + v\psi$ auch durch $u'\varphi' + v'\psi'$ ausgedrückt werden. Dazu sind die Bedingungen

$$u_1 u' + u_2 v' = u, \qquad v_1 u' + v_2 v' = v$$

erforderlich und hinreichend.

Wenn die Determinante der Form $u\varphi + v\psi$

$$f(u, v) = \Sigma \pm (ua_{11} + vb_{11}) \ldots (ua_{nn} + vb_{nn})$$
$$= (uv_1 - u_1 v) \ldots (uv_n - u_n v) \, \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

einen complexen Divisor hat, d. h. wenn die Gleichung $f(u, v) = 0$ eine complexe Wurzel hat, so sind alle ordinären Formen $u\varphi + v\psi$ indefinit*).

---

*) Kronecker a. a. O. Vergl. unten §. 14, 13.

**Beweis.** Es seien $u_1$ und $u_2$, $v_1$ und $v_2$ conjugirt complexe Zahlen, und $u_1\varphi + v_1\psi$, $u_2\varphi + v_2\psi$ Formen mit verschwindender Determinante, mithin von weniger als $n$ Variablen und darstellbar durch weniger als $n$ Quadrate z. B.

$$(y_1 + iz_1)^2 + \cdots + (y_{n-1} + iz_{n-1})^2 = \Sigma(y_r^2 - z_r^2) + 2i\Sigma y_r z_r$$

in denen $i$ eine Wurzel der negativen Einheit, $y_1$, $z_1$, $y_2$, $z_2$, .. reale lineare Formen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten. Dann sind

$$\tfrac{1}{2}(u_1 + u_2)\varphi + \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)\psi = \Sigma(y_r^2 - z_r^2)$$

$$\frac{1}{2i}(u_1 - u_2)\varphi + \frac{1}{2i}(v_1 - v_2)\psi = 2\Sigma y_r z_r$$

zwei Formen, aus denen, wie oben bemerkt, alle Formen $u\varphi + v\psi$ durch

$$u'\Sigma(y_r^2 - z_r^2) + 2v'\Sigma y_r z_r$$

dargestellt werden können. Nun ist

$$u'y^2 + 2v'yz - u'z^2 = \frac{1}{u'}(u'y + v'z)^2 - \frac{1}{u'}(u'^2 + v'^2)z^2$$

$$= (u'y + wz)\left(y - \frac{u'}{w}z\right)$$

wenn $v' + \sqrt{u'^2 + v'^2} = w$ und demnach $v' - \sqrt{u'^2 + v'^2} = -\frac{u'^2}{w}$ gesetzt wird. Jede unter den Formen

$$\Sigma(u'y_r + wz_r)\left(y_r - \frac{u'}{w}z_r\right)$$

verschwindet aber, wenn $x_1, \ldots, x_n$ den $n-1$ linearen Gleichungen $u'y_r + wz_r = 0$ genügen, und ist indefinit unter der Voraussetzung, dass ihre Determinante nicht verschwindet (13).

Umgekehrt schliesst man: Wenn unter allen ordinären Formen $u\varphi + v\psi$ eine definit ist, so hat die Gleichung $f(u, v) = 0$ lauter reale Wurzeln*).

15. Zufolge der Identität

$$u\varphi + v\psi = \frac{uv_k - u_k v}{v_k}\varphi + \frac{u_k\varphi + v_k\psi}{v_k}v$$

kann die Form $u\varphi + v\psi$ mittelst der Divisoren ihrer Determinante durch Quadrate linearer Formen dargestellt werden, in Be-

*) Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 213.

tracht dass $u_k\varphi + v_k\psi$ eine Form von weniger als $n$ Variablen ist*).

Wenn $\varphi$ eine **positive** Form ist, so hat die Determinante von $u\varphi + v\psi$ nur reale Divisoren $uv_k - u_kv$ (11). Die Form $u_k\varphi + v_k\psi$ kann durch $n-1$ Variable $y_2, .., y_n$ ausgedrückt werden. Die Form $\varphi$ kann durch $y_2, .., y_n$ und eine andre Variable ausgedrückt werden, wobei die Quadrate der Variablen positive Coefficienten haben (13). Man kann demnach von $\varphi$ das Quadrat einer linearen Form aller Variablen ablösen, so dass eine Form der $y_2, .., y_n$ übrig bleibt (11), und man erhält

$$u\varphi + v\psi = \frac{uv_k - u_kv}{v_k} z^2 + u\varphi' + v\psi'$$

Hierbei ist $\varphi'$ wiederum eine positive Form, daher kann man die Form $u\varphi' + v\psi'$ der Variablen $y_2, .., y_n$ auf dieselbe Art zertheilen, u. s. w. Ein linearer Divisor der Determinante von $u\varphi' + v\psi'$ ist zugleich ein Divisor der Determinante von $u\varphi + v\psi$, weil beim Verschwinden jener Determinante auch diese verschwindet (10). Also findet man

$$u\varphi + v\psi = \frac{uv_1 - u_1v}{v_1} z_1^2 + .. + \frac{uv_n - u_nv}{u_n} z_n^2$$

folglich

$$\varphi = z_1^2 + .. + z_n^2$$

$$-\psi = \frac{u_1}{v_1} z_1^2 + .. + \frac{u_n}{v_n} z_n^2.$$

Wenn alle Wurzeln $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, ..$ der Gleichung $f(u, v) = 0$ **negativ** sind, so ist $\psi$ eine positive Form.

Die übrigen Fälle sind von Weierstrass und Kronecker Monatsbericht der Berl. Acad. 1868 p. 310 ff. behandelt worden. Vergl. Kronecker über Schaaren quadratischer Formen, Berl. Monatsbericht 1874 Jan.

**16.** Unter einer Sturm'schen Reihe wird eine Reihe von Gliedern verstanden, welche durch die in ihr vorhandenen Zeichenwechsel reale Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung anzeigt**). Jacobi und Hermite haben quadratische Formen ange-

---

*) Kronecker Briefl. Mittheilung 1867.

**) Der nach Sturm benannte Lehrsatz ist von demselben der Pariser Academie 1829 Mai 13 (Férussac Bulletin XI p. 410, Choquet et Mayer

geben, bei denen die Zählung der positiven und der negativen Quadrate, durch welche sie dargestellt werden können, denselben Dienst leistet, wie die Betrachtung einer STURM'schen Reihe.

Aus den von einander verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$, einem gegebenen realen Werth $\omega$ und den Unbestimmten $x_0, x_1, .., x_{m-1}$ bilde man die Summe

$$H = \Sigma(\omega - \alpha)(x_0 + x_1\alpha + .. + x_{m-1}\alpha^{m-1})^2$$

indem man für $\alpha$ die Wurzeln $\alpha_1, .., \alpha_m$ setzt. Jeder realen unter (über) der Grenze $\omega$ liegenden Wurzel entspricht ein positives (negatives) Quadrat der Summe $H$. Jedem Paar conjugirt complexer Wurzeln entspricht ein positives und ein negatives Quadrat der Summe $H$, weil

$$(\beta + \gamma\sqrt{-1})(P + Q\sqrt{-1})^2 + (\beta - \gamma\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1})^2$$
$$= \frac{2}{\beta}\left\{(\beta P - \gamma Q)^2 - (\beta^2 + \gamma^2)Q^2\right\}$$

Also wird die Anzahl der verschiedenen realen unter (über) der Grenze $\omega$ liegenden Wurzeln gefunden, indem man die Anzahl der positiven (negativen) Quadrate in der Summe $H$ um die Anzahl der verschiedenen Paare von complexen Wurzeln vermindert. Die Anzahl der verschiedenen realen zwischen den Grenzen $\omega$ und $\omega'$ liegenden Wurzeln ergiebt sich darnach unabhängig von der Anzahl der complexen Wurzeln.

In der Summe $H$ hat $x_i x_k$ den Coefficienten

$$t_{ik} = \Sigma(\omega - \alpha)\alpha^{i+k} = \omega s_{i+k} - s_{i+k+1}$$

wenn man durch $s_r$ die Summe der $r$ten Potenzen der Wurzeln

---

Algèbre 1832) und Mém. prés. 1835 tom. 6 mitgetheilt worden. Vergl. MOIGNO Liouv. J. 5 p. 75. Die allgemeine Aufstellung einer Sturm'schen Reihe verdankt man SYLVESTER (Philos. Mag. 1839 Dec.), dessen Angaben von STURM (Liouv. J. 7 p. 356) bewiesen, von CAYLEY (Liouv. J. 11 p. 297. 13 p. 269) und JOACHIMSTHAL (Crelle J. 48 p. 386) erweitert wurden. Die zur Vertretung einer Sturm'schen Reihe dienende quadratische Form ist von HERMITE Compt. rend. 1853, I p. 294 aufgestellt worden, weniger umfassend bereits von JACOBI 1847, wie aus einer Mittheilung von BORCHARDT Crelle J. 53 p. 281 hervorgeht. Vergl. SYLVESTER Philos. Trans. 1853 p. 484, BRIOSCHI Nouv. Ann. 1856 Juli und die Monographie HATTENDORF über die Sturm'schen Functionen, Göttingen 1862.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ bezeichnet. Die Grössen $s_r$ sind real und werden aus der Differenz der Quotienten $f'(x) : f(x)$ und $\varphi'(x) : \varphi(x)$ berechnet (§. 10, 6), indem man unter $\varphi(x)$ den Divisor versteht, welchen $f'(x)$ mit $f(x)$ in dem Falle gemein hat, dass die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind (§. 11, 20). Demnach ist $H = \Sigma t_{ik} x_i x_k$ eine quadratische Form mit realen Coefficienten, deren Glieder dadurch gebildet werden, dass man für $i$ und $k$ alle Nummern von 0 bis $m-1$ setzt, und welche durch je eine bestimmte Anzahl von positiven und negativen Quadraten darstellbar ist (12). Die Determinante $T_{m-1} = \Sigma \pm t_{00} \ldots t_{m-1,m-1}$ und die Subdeterminanten $T_{m-2}, T_{m-3}, \ldots$ können nach §. 10, 5 berechnet werden.

Anmerkung. Zu dem angegebenen Zwecke hat HERMITE*) die symmetrische Function

$$G(x, y) = \frac{(y-\omega) f(x) f'(y) - (x-\omega) f(y) f'(x)}{y-x}$$

aufgestellt und in die Summe $\Sigma h_{ik} x^i y^k$ entwickelt, deren Exponenten im Allgemeinen von 0 bis $n-1$ steigen. Zugleich ist

$$G(x, y) = \frac{f(x) f(y)}{y-x} \left\{ (y-\omega) \frac{f'(y)}{f(y)} - (x-\omega) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{1}{x-\alpha}, \qquad \frac{y-\omega}{y-\alpha} - \frac{x-\omega}{x-\alpha} = \frac{(y-x)(\omega-\alpha)}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$$

$$G(x, y) = \Sigma (\omega - \alpha) \frac{f(x)}{x-\alpha} \frac{f(y)}{y-\alpha}$$

Wenn man in diesen Entwickelungen $x^i$, $y^k$ durch $z_i$, $z_k$ ersetzt, so erhält man einerseits die quadratische Form $\Sigma h_{ik} z_i z_k$, andrerseits die quadratische Form

$$\Sigma (\omega - \alpha)(x_0 + x_1 \alpha + \ldots + x_{n-1} \alpha^{n-1})^2$$

wobei $x_0, x_1, \ldots$ lineare Functionen der $z_1, z_2, \ldots$ sind. Die Anzahlen der positiven und der negativen Quadrate, durch welche diese letztre Form sich darstellen lässt, werden durch Bearbeitung

---

*) Crelle J. 52 p. 43. SERRET Algèbre sup. 1866 t. 1 p. 581. Vergl. KRONECKER über die Sturm'schen Reihen, Berl. Monatsbericht 1873 Febr.

der Form $\Sigma h_{ik} z_i z_k$ erkannt, deren Coefficienten ganze Functionen der Coefficienten von $f(x)$ sind.

## §. 14. Die linearen, insbesondere die orthogonalen Substitutionen.

1. Wenn eine oder mehrere Functionen der Variablen $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ durch die linearen Substitutionen

$$x_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \ldots + b_{1n} y_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + \ldots + b_{nn} y_n$$

in Functionen der Variablen $y_1, y_2 \ldots, y_n$ transformirt werden, so wird die Determinante der Substitutionscoefficienten

$$\Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

die Determinante (modulus) der linearen Substitution genannt. Dieselbe muss von Null verschieden sein, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als unabhängig von einander vorausgesetzt werden (§. 8, 1). Die lineare Substitution heisst unimodular*), wenn ihre Determinante $= 1$ ist.

2. Wenn die linearen Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ transformirt werden, so ist die Determinante des Systems der transformirten Functionen das Product der Determinante des Systems der gegebenen Functionen mit der Determinante der linearen Substitution**).

**Beweis.** Es seien

$$f_1 = a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n$$

---

*) SYLVESTER Cambr. and Dubl. math. J. 7 p. 52. Ueber die Construction solcher Determinanten vergl. den oben (§. 3, 11) citirten Aufsatz von HERMITE.

**) Vergl. den algebraischen Beweis der Multiplicationsregel (§. 6), z. B. JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 22. Die weitere Ausführung dieses Satzes ist oben §. 6, 9 gegeben worden.

die gegebenen linearen Functionen. Durch die lineare Substitution

$$x_1 = b_{11}y_1 + \ldots + b_{1n}y_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = b_{n1}y_1 + \ldots + b_{nn}y_n$$

erhält man die transformirten Functionen

$$f_1 = c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_n = c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n$$

worin $c_{ik}$ gefunden wird, indem man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Reihe nach mit $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ multiplicirt, die Producte addirt und in der Summe den Coefficienten $y_k$ aufsucht:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$$

Nach §. 6, 1 ist

$$\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

Anmerkung. Wenn überhaupt die Functionen $f_1, \ldots, f_n$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen $y_1, \ldots, y_n$ transformirt worden sind, so ist die Functionaldeterminante des transformirten Systems das Product der Functionaldeterminante des gegebenen Systems mit der Determinante der Substitution. Nach §. 12, 5 ist nämlich

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial y_n}$$

Nun ist $\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = b_{ik}$, folglich u. s. w.

3. Wenn die Function $f$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch die lineare Substitution (1) in eine Function der Variablen $y_1, \ldots, y_n$ transformirt worden ist, so ist die (Hesse'sche) Determinante $H'$ der zweiten Differentialquotienten der transformirten Function das Product derselben Determinante $H$ der gegebenen Function mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante $B$*). Nach (2) hat man

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_1} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_1} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial x_n} \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

*) Hesse Crelle J. 28 p. 89.

folglich durch Multiplication $H' = HB^2$.

Anmerkung. Wenn die Function $f$ eine quadratische Form bedeutet, so ist ihre Hesse'sche Determinante $H$ von der Determinante dieser Form nicht verschieden (§. 12, 7). Daher wird die Determinante der transformirten Form gefunden, indem man die Determinante der gegebenen Form mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante multiplicirt (§. 6, 4).

4. Unter der Resultante der binären Formen

$$f(x, y) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} y + \ldots$$
$$g(x, y) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} y + \ldots$$

wird die aus den Coefficienten $a_m, a_{m-1}, \ldots, b_n, b_{n-1}, \ldots$ gebildete Formel verstanden, welche oben (§. 11, 5) als die Resultante von $f(x, 1)$ und $g(x, 1)$ angegeben worden ist. Wenn man die Functionen durch die lineare Substitution

$$x = \lambda u + \mu v, \qquad y = \lambda' u + \mu' v$$

transformirt hat, so findet man die auf gleiche Weise zu bildende Resultante der transformirten Functionen, indem man die Resultante der gegebenen Functionen mit der $mn$ten Potenz der Substitutionsdeterminante $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ multiplicirt*). Stellt man die gegebenen Functionen durch die Producte

$$a_m(x - \alpha_1 y) \ldots (x - \alpha_m y) \quad \text{und} \quad b_n(x - \beta_1 y) \ldots (x - \beta_n y)$$

dar, so ist ihre Resultante

$$R = a_m^n b_n^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m;\ \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

Die Differenz $\beta - \alpha$ ist die Determinante eines Paares von linearen Formen $x - \beta y$ und $x - \alpha y$, und geht durch die angegebene Substitution über in (2)

$$(\beta - \alpha)(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$$

Daher geht durch dieselbe Substitution die Resultante $R$ über in

$$R\,(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^{mn}$$

---

*) Dieser Satz ist in einem umfassenderen Satz Boole's enthalten, welchen Cayley Crelle J. 30 p. 1 anführt. Vergl. Jacobi Crelle J. 40 p. 245. Salmon higher plane curves 1852 p. 295.

Um die Discriminante der durch die angezeigte Substitution aus $f(x, y)$ entspringenden Function zu finden, hat man die Discriminante der gegebenen Function (§. 11, 19)

$$a_m^{2m-2} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2$$

mit der $m(m-1)$ten Potenz der Substitutionsdeterminante zu multipliciren, in Betracht dass $\Delta(\alpha_1, \ldots)^2$ das Product von $m(m-1)$ Differenzen ist.

Anmerkung. Es giebt hiernach aus einer oder mehrern homogenen ganzen Functionen abgeleitete homogene ganze Formeln von der Eigenschaft, dass ihr Verhältniss zu den Formeln, die auf dieselbe Weise aus den durch eine lineare Substitution transformirten Functionen abgeleitet werden, eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, mithin den Werth 1 hat, wenn man eine lineare Substitution gebraucht, deren Determinante 1 ist. Die Formeln dieser Art hat Cayley a. a. O. unter dem Namen Hyperdeterminanten einer Function oder eines Systems von Functionen in umfassende Betrachtung gezogen. Man nennt die Hyperdeterminanten nach Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 396) Covarianten oder Invarianten, je nachdem sie ausser den Coefficienten der Functionen auch die Variablen derselben enthalten oder nicht enthalten. Z. B. die Functionaldeterminante $R$ des Systems von Functionen $f_1, \ldots, f_n$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist im Allgemeinen eine Covariante des Systems, weil die Functionaldeterminante des durch eine lineare Substitution, deren Determinante $B$ ist, transformirten Systems den Werth $RB$ hat (2). Wenn das System nur lineare Formen enthält, so ist $R$ nur aus den Coefficienten des Systems zusammengesetzt, also eine Invariante des Systems. Die Hesse'sche Determinante $H$ einer homogenen ganzen Function von mehr als 2 Dimensionen ist eine Covariante der Function, weil dieselbe Determinante der transformirten Function den Werth $HB^2$ hat (3). Die Discriminante einer homogenen ganzen Function ist eine Invariante der Function, und die Resultante von zwei binären Formen ist eine Invariante dieses Systems. Vergl. Salmon Lessons introd. to the modern higher algebra 1859 (deutsch bearb. von Fiedler 1863) und die Abhandlungen von Aronhold Crelle J. 62 p. 281, 69 p. 185, Christoffel Crelle J. 68 p. 246. Clebsch Theorie der binären Formen 1872.

5. Unter den linearen Substitutionen, durch welche man eine gegebene Function transformiren kann, ist besonders eine solche bemerkenswerth, durch welche zugleich die Summe der Quadrate der Variablen in die Summe der Quadrate der neuen Variablen transformirt wird. Diese Substitution ist von Euler (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 75, 20 p. 217), Cauchy (Exerc. de Math. 4 p. 140), Jacobi (Crelle J. 12 p. 7), Cayley (Crelle J, 32 p. 119) in Betracht gezogen worden und heisst nach einer Bemerkung des Letztern eine orthogonale Substitution.

Wenn eine Function der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ durch eine lineare (orthogonale) Substitution

$$x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + .. + c_{1n}y_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + .. + c_{nn}y_n$$

in eine Function von $y_1, y_2, .., y_n$ zu transformiren ist, dergestalt dass

$$y_1^2 + y_2^2 + .. + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2$$

so haben die Coefficienten folgende Haupteigenschaften.

I. Für jedes $i$ und $k$ von 1 bis $n$ ist (Euler)

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + .. + c_{ni}^2 = 1$$
$$c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + .. + c_{ni}c_{nk} = 0$$

zufolge der Identität

$$y_1^2 + y_2^2 + .. + y_n^2$$
$$= (c_{11}y_1 + .. + c_{1n}y_n)^2 + .. + (c_{n1}y_1 + .. + c_{nn}y_n)^2$$
$$= y_1^2(c_{11}^2 + .. + c_{n1}^2) + .. + 2y_1y_2(c_{11}c_{12} + .. + c_{n1}c_{n2}) + ..$$

II. Um die transformirte Function in die gegebene zu transformiren, hat man (Cauchy)

$$y_i = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + .. + c_{ni}x_n$$

zu substituiren. Denn

$$c_{1i}x_1 + .. + c_{ni}x_n$$
$$= y_1(c_{1i}c_{11} + .. + c_{ni}c_{n1}) + .. + y_n(c_{1i}c_{1n} + .. + c_{ni}c_{nn})$$

worin der Coefficient von $y_i$ den Werth 1 hat, während die Coefficienten der übrigen Grössen verschwinden (I).

III. Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution ist 1 (Jacobi). Denn nach der Multiplicationsregel ist

$$\begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} d_{11} & . & . & d_{1n} \\ . & . & . & . \\ d_{n1} & . & . & d_{nn} \end{vmatrix}$$

wo

$$d_{ik} = c_{1i}\,c_{1k} + c_{2i}\,c_{2k} + \,.\,.\, + c_{ni}\,c_{nk}$$

Nun ist $d_{ik} = 0$, $d_{ii} = 1$ (I), folglich reducirt sich die gesuchte Determinante auf ihr Anfangsglied $d_{11}\,d_{22}\,.\,.\,d_{nn} = 1$.

IV. Wenn die Determinante der orthogonalen Substitution durch $\varepsilon$, die Adjuncte von $c_{ik}$ durch $\gamma_{ik}$ bezeichnet wird, so ist (Jacobi)

$$\gamma_{ik} = \varepsilon\, c_{ik}$$

Um diese Identität zu finden, multiplicirt man der Reihe nach die Identitäten

$$\begin{array}{c} c_{11}\,c_{1k} + \,.\,.\, + c_{n1}\,c_{nk} = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{1k}c_{1k} + \,.\,.\, + c_{nk}\,c_{nk} = 1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{1n}c_{1k} + \,.\,.\, + c_{nn}c_{nk} = 0 \end{array}$$

mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in}$. Durch Summirung erhält man

$$c_{1k}(c_{11}\gamma_{i1} + \,.\,.\, + c_{1n}\gamma_{in}) + \,.\,.\, + c_{ik}(c_{i1}\gamma_{i1} + \,.\,.\, + c_{in}\gamma_{in})$$
$$+ \,.\,.\, + c_{nk}(c_{n1}\gamma_{i1} + \,.\,.\, + c_{nn}\gamma_{in}) = \gamma_{ik}$$

Der Coefficient von $c_{ik}$ ist $\varepsilon$, die Coefficienten der übrigen Grössen $c_{1k}, \ldots, c_{nk}$ verschwinden (§. 3, 2).

V. Die Coefficienten der orthogonalen Substitution genügen dem zweiten System von Identitäten (Euler)

$$\begin{array}{c} c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \,.\,.\, + c_{in}^2 = 1 \\ c_{i1}\,c_{k1} + c_{i2}\,c_{k2} + \,.\,.\, + c_{in}\,c_{kn} = 0 \end{array}$$

Denn nach (IV) ist

$$\varepsilon(c_{i1}\,c_{k1} + \,.\,.\, + c_{in}\,c_{kn}) = \gamma_{i1}c_{k1} + \,.\,.\, + \gamma_{in}c_{kn}$$

Dieses Aggregat hat aber den Werth $\varepsilon$ oder 0, je nachdem $i$ und $k$ gleich oder ungleich sind (§. 3, 2).

VI. Unter den Subdeterminanten des Systems der Coefficienten einer orthogonalen Substitution findet folgender Zusammenhang statt (Jacobi):

$$\begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot\cdot & c_{mm} \end{vmatrix}$$

Denn nach §. 6, 2 hat man

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot\cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot\cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m-1} \begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

und nach (IV)

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot\cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot\cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot\cdot & c_{mm} \end{vmatrix}$$

Durch Vergleichung dieser Identitäten ergiebt sich die behauptete Identität.

Noch einige weniger nahe liegende Relationen zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution haben Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung und Jacobi Crelle J. 30 p. 46 angegeben. Vergl. Hesse Crelle J. 57 p. 175.

Anmerkung. Eine lineare Substitution, durch welche die Form

$$x_1^2 + \ldots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \ldots + y_i^2 - y_{i+1}^2 - \ldots - y_n^2$$

verwandelt werden soll, kann aus einer orthogonalen Substitution abgeleitet werden, durch welche man die Form

$$x_1^2 + \ldots + x_i^2 + y_{i+1}^2 + \ldots + y_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \ldots + y_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

überführt. Mittelst der für $y_{i+1}, \ldots, y_n$ zu machenden Substitutionen werden dann die Variablen $x_{i+1}, \ldots, x_n$ durch $y_1, \ldots, y_n$ ausgedrückt. Jacobi Crelle J. 53 p. 278.

6. Da die $n^2$ Coefficienten einer orthogonalen Substitution $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen (5, I) zu genügen haben, so lassen sie sich als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen

$$\begin{matrix} b_{12} & b_{13} & .. & b_{1n} \\ & b_{23} & .. & b_{2n} \\ & & .. & . \\ & & & b_{n-1,n} \end{matrix}$$

betrachten. In der That hat EULER nicht nur den Weg angezeigt, wie man durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ binäre Transformationen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darstellen könne, sondern er hat auch in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ diese Coefficienten durch die unbestimmten Grössen rational ausgedrückt. Mit Hülfe der Determinanten ist es CAYLEY (l. c.) gelungen, bei $n$ Variablen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als rationale Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darzustellen.

Wenn nämlich durch $b_{12}, .., b_{n-1,n}$ unbestimmte Grössen bezeichnet werden, wenn man unter den Voraussetzungen

$$b_{ik} + b_{ki} = 0, \quad b_{11} = b_{22} = .. = \omega$$

die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ . & .. & . \\ b_{n1} & .. & b_{nn} \end{vmatrix}$$

bildet und die Adjuncte von $b_{ik}$ durch $\beta_{ik}$ bezeichnet, so hat man

$$c_{ik} = \frac{2\omega\beta_{ik}}{B}, \qquad c_{ii} = \frac{2\omega\beta_{ii} - B}{B}$$

als allgemeine Formeln für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Determinante den Werth 1 hat. Die Coefficienten einer orthogonalen Substitution von der Determinante $-1$ erhält man, indem man im System der gefundenen Coefficienten bei einer ungeraden Anzahl paralleler Reihen die Zeichen ändert.

**Beweis.** Die Grössen $x_1, x_2, .., x_n$ können dadurch von den Grössen $y_1, y_2, .., y_n$ abhängig gemacht werden, dass man zugleich

$$\begin{aligned} x_i &= b_{1i} z_1 + .. + b_{in} z_n \\ y_i &= b_{i1} z_1 + .. + b_{ni} z_n \end{aligned}$$

setzt. Durch Auflösung der linearen Systeme

$$x_1 = b_{11} z_1 + \ldots + b_{1n} z_n \qquad y_1 = b_{11} z_1 + \ldots + b_{n1} z_n$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$x_n = b_{n1} z_1 + \ldots + b_{nn} z_n \qquad y_n = b_{1n} z_1 + \ldots + b_{nn} z_n$$

findet man (§. 8, 1)

$$Bz_i = \beta_{1i} x_1 + \beta_{2i} x_2 + \ldots + \beta_{ni} x_n$$
$$Bz_i = \beta_{i1} y_1 + \beta_{i2} y_2 + \ldots + \beta_{in} y_n$$

Vermöge der Voraussetzungen $b_{ik} + b_{ki} = 0$, $b_{ii} = \omega$ und des zwischen $x_i$, $y_i$ und den Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ angenommenen Zusammenhangs ist aber

$$x_i + y_i = 2\omega z_i$$

folglich hat man zugleich

$$By_i = 2\omega\beta_{1i} x_1 + \ldots + (2\omega\beta_{ii} - B) x_i + \ldots + 2\omega\beta_{ni} x_n$$
$$Bx_i = 2\omega\beta_{i1} y_1 + \ldots + (2\omega\beta_{ii} - B) y_i + \ldots + 2\omega\beta_{in} y_n$$

oder abgekürzt

$$y_i = c_{1i} x_1 + \ldots + c_{ni} x_n$$
$$x_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n$$

Aus der Identität

$$y_i = c_{1i}(c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n) + \ldots + c_{ni}(c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n)$$

folgen die Identitäten

$$1 = c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2$$
$$0 = c_{1i} c_{1k} + c_{2i} c_{2k} + \ldots + c_{ni} c_{nk}$$

wodurch diese rationalen Functionen der unbestimmten Grössen $b_{12}, \ldots, b_{n-1,n}$ als Coefficienten einer orthogonalen Substitution characterisirt werden (5, I).

Dass die Determinante $\varepsilon$ dieser orthogonalen Substitution den Werth 1 (nicht $-1$) hat, erkennt man durch Bildung des Products $\varepsilon B^{n+1}$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 2\omega\beta_{11} - B & 2\omega\beta_{12} & 2\omega\beta_{13} & . \\ 2\omega\beta_{21} & 2\omega\beta_{22} - B & 2\omega\beta_{23} & . \\ 2\omega\beta_{31} & 2\omega\beta_{32} & 2\omega\beta_{33} - B & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

Weil nach §. 3, 2

$$2\omega\beta_{i1} b_{k1} + \ldots + (2\omega\beta_{ii} - B) b_{ki} + \ldots + 2\omega\beta_{in} b_{kn} = B b_{ik}$$
$$2\omega\beta_{i1} b_{i1} + \ldots + (2\omega\beta_{ii} - B) b_{ii} + \ldots + 2\omega\beta_{in} b_{in} = B b_{ii}$$

ist, so hat das Product (§. 6, 3) den Werth $B^{n+1}$, folglich ist $\varepsilon = 1$.

Wenn man endlich die Coefficienten

$$c_{1i},\ c_{2i},\ \ldots,\ c_{ni} \qquad \text{oder} \qquad c_{k1},\ c_{k2},\ \ldots,\ c_{kn}$$

mit den entgegengesetzten Zeichen versieht, so wechselt die Determinante der Substitution ihr Zeichen, während die characteristischen Gleichungen (5, I. V)

$$\begin{aligned} c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 &= 1 \\ c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk} &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} c_{k1}^2 + c_{k2}^2 + \ldots + c_{kn}^2 &= 1 \\ c_{k1}c_{i1} + c_{k2}c_{i2} + \ldots + c_{kn}c_{in} &= 0 \end{aligned}$$

keine Veränderung erleiden.

**Beispiele.** Für $n = 2$ findet man

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2$$

Das adjungirte System ist

$$\begin{matrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{matrix}$$

Daher sind die Coefficienten einer binären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 folgende:

$$\begin{matrix} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ -\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} & \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{matrix}$$

Die orthogonale Substitution

$$\begin{matrix} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} & -\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{matrix}$$

hat die Determinante $-1$.

Für $n = 3$ findet man (§. 5, 9)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

Das adjungirte System ist

$$\begin{matrix} 1+\lambda^2 & \nu+\lambda\mu & -\mu+\lambda\nu \\ -\nu+\lambda\mu & 1+\mu^2 & \lambda+\mu\nu \\ \mu+\lambda\nu & -\lambda+\mu\nu & 1+\nu^2 \end{matrix}$$

Demnach findet man folgende Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1:

$$\begin{matrix} \dfrac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{B} & 2\dfrac{\nu+\lambda\mu}{B} & 2\dfrac{-\mu+\lambda\nu}{B} \\ 2\dfrac{-\nu+\lambda\mu}{B} & \dfrac{1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2}{B} & 2\dfrac{\lambda+\mu\nu}{B} \\ 2\dfrac{\mu+\lambda\nu}{B} & 2\dfrac{-\lambda+\mu\nu}{B} & \dfrac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{B} \end{matrix}$$

wie schon Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung p. 101 angegeben hat. Diese Coefficienten sind von Rodrigues (Liouv. J. 5 p. 405) aus denselben Formeln abgeleitet worden, welche Euler (Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217) zur Transformation eines dreirechtwinkeligen Coordinatensystems aufgestellt hatte. Um die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante $-1$ zu erhalten, braucht man nur in dem obigen System die Zeichen von einer oder drei Zeilen oder von eben so viel Colonnen zu verändern.

Für $n = 4$ findet man

$$B = \begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix} = (\omega^2 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2 + \vartheta^2)\omega^2$$

$$\omega\vartheta = af + bg + ch$$

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= (\omega^2 + f^2 + g^2 + h^2)\omega^2 & \beta_{12} &= (a\omega + f\vartheta - bh + cg)\omega \\ \beta_{21} &= (-a\omega - f\vartheta + cg - bh)\omega & \beta_{22} &= (\omega^2 + f^2 + b^2 + c^2)\omega^2 \\ \beta_{31} &= (-b\omega - cf - g\vartheta + ah)\omega & \beta_{32} &= (-h\omega + fg - ab + c\vartheta)\omega \\ \beta_{41} &= (-c\omega + bf - ag - h\vartheta)\omega & \beta_{42} &= (g\omega + fh + b\vartheta - ca)\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{13} &= (b\omega + g\vartheta - cf + ah)\omega & \beta_{14} &= (c\omega + h\vartheta - ag + bf)\omega \\ \beta_{23} &= (h\omega + fg + c\vartheta - ab)\omega & \beta_{24} &= (-g\omega + hf - ac - b\vartheta)\omega \\ \beta_{33} &= (\omega^2 + g^2 + c^2 + a^2)\omega^2 & \beta_{34} &= (f\omega + gh + a\vartheta - bc)\omega \\ \beta_{43} &= (-f\omega + gh - bc - a\vartheta)\omega & \beta_{44} &= (\omega^2 + h^2 + a^2 + b^2)\omega^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bc_{11} &= [\omega^2 - \vartheta^2 + f^2 - a^2 + g^2 - b^2 + h^2 - c^2]\omega^2 \\ Bc_{22} &= [\omega^2 - \vartheta^2 + f^2 - a^2 - (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]\omega^2 \\ Bc_{33} &= [\omega^2 - \vartheta^2 - (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]\omega^2 \\ Bc_{44} &= [\omega^2 - \vartheta^2 - (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]\omega^2 \end{aligned}$$

u. s. w. Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich ohne Weiteres die

Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 oder —1 aufstellen.

CAYLEY's System dieser Coefficienten in Crelle J. 32 p. 122 enthält zwei Fehler (in $\beta_{24}$ steht $-hf$ statt $hf$, in $Bc_{11}$, $Bc_{22}$, .. steht 1 statt $1-\vartheta^2$), welche in der neueren Mittheilung CAYLEY's Crelle J. 50 p. 311 nicht vorkommen. Dagegen ist an dem zuletzt erwähnten Orte p. 312 Z. 5 v. o. der Druckfehler $+\delta\gamma'$ in $-\delta\gamma'$ zu verbessern. Die von CAYLEY gefundenen Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution kommen in anderer Form bei EULER (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 102) vor, der sie »nulla certa methodo, sed potius quasi divinando« erhalten hatte. EULER fügt hinzu: »si quis viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit, insignia certe subsidia analysi attulisse erit censendus.« Es ist CAYLEY nicht entgangen, wie sich aus den von ihm aufgestellten Coefficienten die EULER'sche Lösung ableiten lässt (vergl. Crelle J. 50 p. 312). Setzt man im obigen System

$$\omega = -\frac{s+d}{2}, \quad f = \frac{r+c}{2}, \quad g = -\frac{q+b}{2}, \quad h = \frac{p+a}{2}$$

$$\vartheta = \frac{s-d}{2}, \quad a = \frac{r-c}{2}, \quad b = -\frac{q-b}{2}, \quad c = \frac{p-a}{2}$$

und ändert man die Zeichen der letzten Horizontalreihe, wodurch die Determinante der orthogonalen Substitution den Werth —1 annimmt, so erhält man EULER's System ohne irgend eine Abweichung. Denn das zweite Element der zweiten Zeile enthält bei EULER nur durch einen Druckfehler $-ds$ statt $+ds$.

7. Die binäre und ternäre orthogonale Substitution ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Transformation der orthogonalen Punctcoordinaten. Um von dem orthogonalen System $x$, $y$ zu dem orthogonalen System $x'$, $y'$ überzugehen, unter der Voraussetzung, dass $x$, $y$, $x'$, $y'$ Richtungen einer Ebene sind, hat man die lineare Substitution zu machen, deren Coefficienten

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{matrix}$$

sind. Wenn Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, mithin $xy + yx = 0$ ist, so hat man

$$xy' = xx' + x'y', \quad yx' = yx + xx', \quad yy' = yx + xx' + x'y'$$

Sind nun die Winkel $xy$ und $x'y'$ beide $= 90^0$, so ist

$$\cos xy' = -\sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = \cos xx'$$

Wenn dagegen $xy = 90^0$ und $x'y' = -90^0$ ist, so ist

$$\cos xy' = \sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = -\cos xx'$$

Daher hat man, wie bekannt, beim Uebergange zu einem System desselben Sinnes die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & -\sin xx' \\ \sin xx' & \cos xx' \end{matrix}$$

mit der Determinante 1 zu machen; beim Uebergange zu einem System entgegengesetzten Sinnes ist die erforderliche Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \sin xx' \\ \sin xx' & -\cos xx' \end{matrix}$$

mit der Determinante $-1$.

Diese Bemerkungen werden durch ein bekanntes goniometrisches Theorem (s. unten §. 16, 3) bestätigt, nach welchem für beliebige Richtungen einer Ebene $x$, $y$, $x'$, $y'$

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix} = \sin xy \sin x'y'$$

Diese Determinante ist positiv oder negativ, je nachdem $\sin xy$ und $\sin x'y'$ einerlei Zeichen haben oder nicht.

Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' = 1$$
$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' = 1$$
$$\cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' = 0$$

dass $\sin^2 xy$ und $\sin^2 x'y'$ den Werth 1 haben. Denn nach der Multiplicationsregel (§. 6, 3) ist

$$\sin^2 xy \sin^2 x'y' = \begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Um die angegebenen Substitutionen zu rationalisiren, braucht man nur $\cos xx' = \cos^2 \frac{1}{2} xx' \; (1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} xx')$ u. s. w. zu benutzen und die Coefficienten der Substitution durch $\operatorname{tang} \frac{1}{2} xx'$ auszudrücken. Vergl. (6) Beispiel 1.

8. Um von dem orthogonalen Coordinatensystem $x$, $y$, $z$ zu

dem orthogonalen System $x'$, $y'$, $z'$ überzugehen, hat man bekanntlich die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{matrix}$$

zu machen, deren Coefficienten den Gleichungen (5, I) genügen müssen, mithin Functionen von 3 unbestimmten Grössen sind. Bezeichnet $O$ den gemeinschaftlichen Anfang der Coordinaten und wird die Kugel, deren Centrum $O$ und deren Radius die Längeneinheit ist, von den Richtungen der positiven Coordinaten in $X$, $Y$, $Z$, $X'$, $Y'$, $Z'$ geschnitten, so sind die Coordinatensysteme desselben oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die sphärischen Dreiecke $XYZ$ und $X'Y'Z'$, oder die Tetraeder $OXYZ$ und $OX'Y'Z'$ desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind.

I. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und desselben Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Punct $S$ von solcher Lage, dass

$$SX = SX', \qquad SY = SY', \qquad SZ = SZ'$$

$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \qquad YSZ = Y'SZ', \qquad XSZ = X'SZ'$$

$$XSZ' = YSY' = ZSZ' \text{*)}$$

Nach einem elementaren Satze der sphärischen Trigonometrie hat man daher, wenn $OS$ durch $s$ und der Winkel $XSX'$ durch $\varphi$ bezeichnet wird,

$$\cos xx' = \cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = \cos^2 sx\,(1-\cos\varphi) + \cos\varphi$$

$$\cos yy' = \cos^2 sy + \sin^2 sy \cos\varphi = \cos^2 sy\,(1-\cos\varphi) + \cos\varphi$$

$$\cos zz' = \cos^2 sz + \sin^2 sz \cos\varphi = \cos^2 sz\,(1-\cos\varphi) + \cos\varphi$$

Wenn man ferner die gleichen Winkel $XSY$ und $X'SY'$ durch $\vartheta$ bezeichnet, so hat man nach demselben Satze der Trigonometrie

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy' + \sin sx \sin sy' \cos(\varphi + \vartheta)$$

$$= \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\varphi \cos\vartheta - \sin sx \sin sy \sin\varphi \sin\vartheta$$

Da aber

$$\cos xy = \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\vartheta = 0$$

$$\sin sx \sin sy \sin\vartheta = 6\,OXYS = \sin xy \cos sz = \cos sz$$

---

*) Vergl. des Verf. Abhandlung über die Gleichheit und Aehnlichkeit u. s. w. Dresden 1852, §. 31 und 52, oder Elem. d. Math. 5tes Buch §. 4, 18.

so erhält man

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy(1-\cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi$$

Aus dem Werthe von $\cos xy'$ findet man $\cos yx'$, weil der Winkel $YSX' = YSX + XSX' = -\varphi + \vartheta$ ist, durch Vertauschung von $\varphi$ mit $-\varphi$

$$\cos yx' = \cos sx \cos sy\,(1-\cos\varphi) + \cos sz \sin\varphi$$

Ebenso ist*)

$$\cos yz' = \cos sy \cos sz\,(1-\cos\varphi) - \cos sx \sin\varphi$$
$$\cos zy' = \cos sy \cos sz\,(1-\cos\varphi) + \cos sx \sin\varphi$$

$$\cos zx' = \cos sz \cos sx\,(1-\cos\varphi) - \cos sy \sin\varphi$$
$$\cos xz' = \cos sz \cos sx\,(1-\cos\varphi) + \cos sy \sin\varphi$$

wo von den verfügbaren Grössen $sx$, $sy$, $sz$, $\varphi$ die ersteren durch die Gleichung

$$\cos^2 sx + \cos^2 sy + \cos^2 sz = 1$$

unter einander verbunden sind.

Um diese Substitutionscoefficienten zu rationalisiren, führt man $\frac{1}{2}\varphi$ ein und erhält

$$\cos xx' = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi + 2\cos^2 sx \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$\cos xy' = 2\cos sx \cos sy \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi - 2\cos sz \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

u. s. w. Setzt man

$$\cos sx \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \lambda, \quad \cos sy \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \mu, \quad \cos sz \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \nu$$

mithin

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \quad \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

so erhält man das obige System rationaler Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution (6).

II. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Hauptkreis, dessen Pol $S$ seinem Gegenpunct entspricht, so dass

---

*) Diess sind die von EULER Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217 gefundenen Formeln, welche JACOBI Crelle J. 2 p. 188 in Erinnerung gebracht hat mit der Aufforderung, dieselben einfacher abzuleiten.

$$SX + SX' = 180^\circ, \quad SY + SY' = 180^\circ, \quad SZ + SZ' = 180^\circ$$
$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \quad YSZ = Y'SZ', \quad XSZ = X'SZ'$$
$$XSX' = YSY' = ZSZ'$$

Unter Annahme der vorigen Bezeichnungen hat man

$$\cos xx' = -\cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = -\cos^2 sx(1 + \cos\varphi) + \cos\varphi$$
$$\cos xy' = -\cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos(\varphi + \vartheta)$$
$$= -\cos sx \cos sy(1 + \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi$$

u. s. w. Diese Formeln unterscheiden sich von den im vorigen Falle gefundenen nur durch die Zeichen, nachdem $\varphi$ mit $180^0 - \varphi$ vertauscht worden ist. Der Winkel $180^0 - \varphi$ ist aber derjenige, welchen das System $x', y', z'$ um die Axe $s$ beschreiben muss, damit $X'Y'Z'$ mit der Gegenfigur von $XYZ$ zusammenfällt.

III. Nach Staudt's Theorem (s. unten §. 16, 3) ist für beliebige Winkel und Lagen der coordinirten Axen

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{vmatrix} = 36\ OXYZ \,.\, OX'Y'Z'$$

Folglich ist die Determinante positiv oder negativ, je nachdem diese Tetraeder oder die von den Axen gebildeten Ecken desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind. Bei einem orthogonalen System beträgt aber das zugehörige Tetraeder $\frac{1}{6}$ Cubikeinheit, daher ist die Determinante der orthogonalen Substitution 1 oder $-1$, je nachdem das neue System mit dem alten desselben oder entgegengesetzten Sinnes ist*).

IV. Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' + \cos^2 xz' = 1$$
$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' + \cos^2 yz' = 1$$
$$\cos^2 zx' + \cos^2 zy' + \cos^2 zz' = 1$$

$$\cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0$$
$$\cos xx' \cos zx' + \cos xy' \cos zy' + \cos xz' \cos zz' = 0$$
$$\cos yx' \cos zx' + \cos yy' \cos zy' + \cos yz' \cos zz' = 0$$

dass die Systeme $x, y, z$ und $x', y', z'$ orthogonal sind**). Denn

---

*) Auf diesen Unterschied der Substitutionsdeterminanten hat Jacobi Crelle J. 15 p. 309 aufmerksam gemacht. Vergl. Möbius Statik §. 127, Magnus anal. Geom. des Raumes §. 13.

**) Dedekind Crelle J. 50 p. 272.

$$(36\, OXYZ \,.\, OX'Y'Z')^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

worin nach der Regel für die Multiplication der Determinanten

$$a_{11} = \cos xx' \cos xx' + \cos xy' \cos xy' + \cos xz' \cos xz' = 1$$
$$a_{12} = \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0$$

u. s. w., so dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nun ist $6\, OXYZ = \sin xy \sin xz \sin (xy^\wedge xz)$ u. s. w. Das Product der Sinus wird aber nur dann 1, wenn die Winkel recht sind.

9. Wenn $c_{11}, \ldots, c_{nn}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bedeuten, deren Determinante $\varepsilon$ d. i. entweder 1 oder $-1$ ist, wenn

$$f(z) = \begin{vmatrix} c_{11} + z & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} + z & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} + z \end{vmatrix}$$

so ist die Gleichung $f(z) = 0$ reciprok und hat mit Ausnahme der Wurzel $-\varepsilon$, welche bei ungeradem $n$ vorhanden ist, und der Wurzeln 1 und $-1$, welche bei $\varepsilon = -1$ und geradem $n$ vorhanden sind, keine realen Wurzeln*).

**Beweis.** Die Entwickelung der Determinante $f(z)$ nach steigenden Potenzen von $z$ (§. 5, 1) giebt vermöge der in (5, VI) bewiesenen Eigenschaft der zu $f(0)$ gehörigen Subdeterminanten ohne Weiteres zu erkennen, dass die Coefficienten von $z^0, z^1, z^2, \ldots$ von den Coefficienten von $z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, \ldots$ sich nur durch den Factor $\varepsilon$ unterscheiden, dass also

$$\frac{\varepsilon f(z)}{z^n} = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

was sich durch Multiplication der Determinanten $\varepsilon$ und $f(z)$ bestätigen lässt. Demnach ist $f(-\varepsilon) = (-1)^n \varepsilon^{n-1} f(-\varepsilon)$, also

*) Brioschi Liouv. J. 19 p. 253. Vergl. Schläfli Crelle J. 65 p. 186.

$f(-\varepsilon) = 0$, wenn entweder $n$ ungerade, oder $n$ gerade und $\varepsilon = -1$. Ferner ist $f(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1} f(\varepsilon)$, also $f(\varepsilon) = 0$, wenn $n$ gerade und $\varepsilon = -1$. Ueber die Realität der übrigen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ erhält man Aufschluss durch das Product der Determinanten

$$f(z)f(-z) = \begin{vmatrix} d_{11} - z^2 & zd_{12} & zd_{13} & . \\ zd_{21} & d_{22} - z^2 & zd_{23} & . \\ zd_{31} & zd_{32} & d_{33} - z^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

worin nach der Multiplicationsregel

$$d_{ii} - z^2 = c_{i1} c_{i1} + \ldots + (c_{ii} + z)(c_{ii} - z) + \ldots + c_{in} c_{in}$$
$$z d_{ik} = c_{i1} c_{k1} + \ldots + (c_{ii} + z) c_{ki} + \ldots + c_{ik}(c_{kk} - z) + \ldots + c_{in} c_{kn}$$

folglich (5, I)

$$d_{ii} = 1, \qquad d_{ik} = c_{ki} - c_{ik}$$

ist. Daher hat man $d_{ik} + d_{ki} = 0$, und nach §. 5, 9

$$\frac{f(z)\,f(-z)}{z^n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} - z & d_{12} & . \\ d_{21} & \frac{1}{z} - z & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z} - z\right)^n + \left(\frac{1}{z} - z\right)^{n-2} \Sigma D_2 + \ldots$$

wobei die a. a. O. näher beschriebenen Coefficienten der Potenzen von $\frac{1}{z} - z$ positiv sind. Wenn nun $z$ real ist, so ist bei geraden oder ungeraden $n$

$$\frac{f(z)f(-z)}{z^n} \quad \text{oder} \quad \frac{f(z)f(-z)}{z^n\left(\frac{1}{z} - z\right)}$$

positiv, folglich $f(z)$ von Null verschieden.

10. Wenn durch die lineare Substitution

$$x_1 = c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n$$

die quadratische Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ in die Summe von $n$ Quadraten $p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \ldots + p_n y_n^2$ übergeht, so erfolgt die Identität

$$\sum_{ik} a_{ik}(c_{i1} y_1 + \ldots)(c_{k1} y_1 + \ldots) = p_1 y_1^2 + \ldots + p_n y_n^2$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{ik} a_{ik}(c_{ir}c_{ks} + c_{is}c_{kr}) = 0, \qquad \sum_{ik} a_{ik}c_{ir}c_{kr} = p_r$$

Setzt man zur Abkürzung

$$g_{is} = a_{i1}c_{1s} + \ldots + a_{in}c_{ns}$$

so erhält man bei der Voraussetzung $a_{ki} = a_{ik}$ zur Bestimmung der Substitution das unzureichende System von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen

$$c_{1r}g_{1s} + \ldots + c_{nr}g_{ns} = 0$$

Aus solchen Grössen $c$, welche diesem System genügen, bildet man dann

$$c_{1r}g_{1r} + \ldots + c_{nr}g_{nr} = p_r$$

und findet

$$g_{1r}x_1 + \ldots + g_{nr}x_n = p_r y_r$$

$$p_r y_r^2 = \frac{(g_{1r}x_1 + \ldots + g_{nr}x_n)^2}{g_{1r}c_{1r} + \ldots + g_{nr}c_{nr}}$$

so dass nur die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten zu einander in Betracht kommen.

Die Determinanten der gegebenen und der transformirten Form sind $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und $p_1 p_2 \ldots p_n$. Wenn nun die Determinante der Substitution den Werth $\varepsilon$ hat, so ist (3)

$$p_1 \ldots p_n = \varepsilon^2 \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

Wenn man ferner die Adjuncte des Elements $c_{ik}$ in der Determinante $\varepsilon$ durch $\gamma_{ik}$ bezeichnet, und die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{11}g_{1r} + \ldots + c_{n1}g_{nr} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_r & = & c_{1r}g_{1r} + \ldots + c_{nr}g_{nr} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & = & c_{1n}g_{1r} + \ldots + c_{nn}g_{nr} \end{array}$$

der Reihe nach mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots$ multiplicirt, so findet man durch Addition

$$p_r \gamma_{ir} = \varepsilon g_{ir}$$

und hiernach wie oben (5)

$$p_1 \ldots p_m \Sigma \pm c_{m+1,m+1} \ldots c_{nn} = \varepsilon \Sigma \pm g_{11} \ldots g_{mm}$$

11. Die Summe $f = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ von $n^2$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $i$ und $k$ alle Nummern von 1 bis $n$ setzt, und deren Coefficienten $a_{ik}$ einer Beschränkung nicht unterliegen, ist eine lineare Form sowohl der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, als auch der Variablen $y_1, \ldots, y_n$, und heisst deshalb eine **bilineare Form** derselben*).

Aus den Differentialquotienten

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n$$

$$v_k = \frac{\partial f}{\partial y_k} = a_{1k} x_1 + \ldots + a_{nk} x_n$$

bildet man die characteristische Gleichung

$$f = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n = v_1 y_1 + \ldots + v_n y_n$$

Von der bilinearen Form kann man ein Product einer linearen Function der $x$ mit einer linearen Function der $y$ so ablösen, dass eine bilineare Form von zweimal $n-1$ Variablen übrig bleibt. Unter der Voraussetzung, dass der Coefficient $a_{11}$ nicht null ist, dass also in $u_1$ die Variable $y_1$, in $v_1$ die Variable $x_1$ nicht fehlt, bilde man die bilineare Form

$$f_1 = f - \frac{u_1 v_1}{a_{11}} = \Sigma a'_{ik} x_i y_k$$

welche die Variablen $x_1$, $y_1$ nicht mehr enthält, weil

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1} a_{1k}}{a_{11}}$$

verschwindet, wenn für $i$ oder $k$ die Nummer 1 gesetzt wird. Mittelst der Differentialquotienten

$$u'_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \qquad v'_k = \frac{\partial f_1}{\partial y_k}$$

kann ferner unter der Voraussetzung, dass $a'_{22}$ nicht null ist, dass also weder $y_2$ in $u'_2$ noch $x_2$ in $v'_2$ fehlt, die bilineare Form

$$f_2 = f_1 - \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} = \Sigma a''_{ik} x_i y_k$$

gebildet werden, welche auch die Variablen $x_2$, $y_2$ nicht mehr enthält, weil der Coefficient

$$a''_{ik} = a'_{ik} - \frac{a'_{i2} a'_{2k}}{a'_{22}}$$

*) Jacobi Crelle J. 53 p. 265. Vergl. Christoffel Crelle J. 63 p. 255.

verschwindet, wenn für $i$ oder $k$ die Nummer 2 gesetzt wird. Durch fortgesetzte Ausscheidungen der angegebenen Art erhält man die besondere Darstellung

$$f = \frac{u_1 v_1}{a_{11}} + \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} + \frac{u''_3 v''_3}{a''_{33}} + \ldots$$

Die Differentiation ergiebt aber

$$\begin{array}{ll} u'_i = u_i - \dfrac{u_1 a_{i1}}{a_{11}}, & v'_k = v_k - \dfrac{v_1 a_{1k}}{a_{11}} \\ u''_i = u'_i - \dfrac{u'_2 a'_{i2}}{a'_{22}}, & v''_k = v'_k - \dfrac{v'_2 a'_{2k}}{a'_{22}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

mithin ist $u'_i$ eine von $y_1$ unabhängige homogene lineare Verbindung von $u_1$ und $u_i$; $u''_i$ eine von $y_1$ und $y_2$ unabhängige homogene lineare Verbindung von $u'_2$ und $u'_i$, also auch von $u_1$, $u_2$, $u_i$; u. s. w. In allen diesen Verbindungen hat $u_i$ den Coefficienten 1. Daher kann

$$u^{(m)}_i = C_1 u_1 + \ldots + C_m u_m + u_i$$

gesetzt werden. Weil diese Formel von $y_1, \ldots, y_m$ unabhängig sein soll, so verschwinden die Coefficienten dieser Grössen, und man hat

$$\begin{array}{l} 0 = C_1 a_{11} + \ldots + C_m a_{m1} + a_{i1} \\ \ldots\ldots \\ 0 = C_1 a_{1m} + \ldots + C_m a_{mm} + a_{im} \end{array}$$

folglich (§. 8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & a_{i1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \ldots & a_{mm} & a_{im} \\ u_1 & \ldots & u_m & u_i - u^{(m)}_i \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$u^{(m)}_i \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & a_{i1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \ldots & a_{mm} & a_{im} \\ u_1 & \ldots & u_m & u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & u_1 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & u_m \\ a_{i1} & \ldots & a_{im} & u_i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{1n} y_n \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{mn} y_n \\ a_{i1} & \ldots & a_{im} & a_{i,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{in} y_n \end{vmatrix}$$

Aus $u^{(m)}_i$ wird $v^{(m)}_k$ abgeleitet, indem man $u_r$ durch $v_r$, und $a_{rs}$ durch $a_{sr}$ ersetzt.

Die Variable $y_k$ hat in $u^{(m)}_i$ den Coefficienten $a^{(m)}_{ik}$, also ist

$$a^{(m)}_{ik} \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} a_{ik}$$

$$a^{(m)}_{m+1,m+1} = \frac{\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{m+1,m+1}}{\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}}$$

Unter Annahme der Bezeichnungen

$$A_m = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}$$

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,m-1} & u_1 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,m-1} & a_{1m} y_m + \ldots \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{m,m-1} & a_{mm} y_m + \ldots \end{vmatrix}$$

$$= A_m y_m + \ldots$$

$$V_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m-1,1} & v_1 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \ldots & a_{m-1,m} & v_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m-1,1} & a_{m1} x_m + \ldots \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\ a_{1m} & \ldots & a_{m-1,m} & a_{mm} x_m + \ldots \end{vmatrix}$$

$$= A_m x_m + \ldots$$

ergiebt sich endlich

$$\frac{u^{(m)}_{m+1} v^{(m)}_{m+1}}{a^{(m)}_{m+1,m+1}} = \frac{U_{m+1} V_{m+1}}{A_m A_{m+1}} = \frac{A_{m+1}}{A_m} x_{m+1} y_{m+1} + \ldots$$

$$f = \frac{U_1 V_1}{A_1} + \frac{U_2 V_2}{A_1 A_2} + \frac{U_3 V_3}{A_2 A_3} + \ldots$$

Wenn es demnach eine Anordnung der Variablen einer bilinearen Form giebt, bei der die partialen Determinanten $A_1$, $A_2$, $A_3$, .. nicht verschwinden, so kann die bilineare Form auf eine bestimmte Weise als Summe von Producten homogener linearer Functionen $U_1 V_1$, $U_2 V_2$, .. so dargestellt werden, dass $U_m$ und $V_m$ von der $m$ten (und den folgenden) Variablen je einer Schaar abhängen und die vorangehenden Variablen nicht enthalten.

12. Ebenso kann unter den analogen Voraussetzungen die quadratische Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, deren Coefficienten $a_{ik}$ und $a_{ki}$ gleich sind, auf eine bestimmte Weise als Aggregat von Quadraten linearer Formen der Variablen so dargestellt werden, dass die $m$te Form von der $m$ten und den folgenden Variablen, aber nicht von den vorangehenden abhängt*). Denn die bilineare Form $f = \Sigma a_{ik} x_i y_k$

*) Jacobi Crelle J. 53 p. 270 und 282. Diese Transformation der quadrati-

geht in die gegebene quadratische Form über, wenn $y_k$ mit $x_k$, $a_{ki}$ mit $a_{ik}$ zusammenfällt. Versteht man nun unter $u_i$, $u'_i$, .. die halben Differentialquotienten (§. 13, 1), so hat man (11)

$$f = \frac{U_1^2}{A_1} + \frac{U_2^2}{A_1 A_2} + \cdots + \frac{U_n^2}{A_{n-1} A_n}$$

worin $A_m = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}$ eine nicht verschwindende Subdeterminante des Systems der Coefficienten bedeutet, und

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\;\cdot & a_{1,m-1} & u_1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\;\cdot & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\;\cdot & a_{1,m-1} & a_{1m} x_m + \cdots \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\;\cdot & a_{m,m-1} & a_{mm} x_m + \cdots \end{vmatrix}$$

Die Anzahl der Quadrate, welche negative Coefficienten haben, ist der Anzahl der Zeichenwechsel gleich, welche die Reihe

$$1, \quad A_1, \quad A_2, \ldots, A_n$$

darbietet.

13. Zwei gegebene quadratische Formen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$

$$\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad \psi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$$

deren Determinanten nicht verschwinden, können im Allgemeinen durch eine bestimmte lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} y_1 + \cdots + c_{1n} y_n \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n &= c_{n1} y_1 + \cdots + c_{nn} y_n \end{aligned}$$

deren Determinante den Werth $\varepsilon$ hat, in die Formen

$$\begin{aligned} \varphi &= p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \cdots + p_n y_n^2 \\ \psi &= s_1 p_1 y_1^2 + s_2 p_2 y_2^2 + \cdots + s_n p_n y_n^2 \end{aligned}$$

gebracht werden*). Denn man hat zur Bestimmung der $n^2$ Substitutionscoefficienten $\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + n$ Gleichungen (10),

I. Bei dieser Transformation geht die quadratische Form $s\varphi - \psi$ mit der Determinante

---

schen Formen war von Gauss theor. combin. observ. 31 (Comm. Gött. V. 1819) angezeigt worden. Einen Beweis derselben findet man bei Brioschi Nouv. Ann. 1856 Juli.

*) Cauchy 1829 Exerc. de Math. 4 p. 140. Jacobi Crelle J. 12 p. 1. Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 207 (vergl. Brioschi Ann. di Matem. 1858 Juli und Christoffel Crelle J. 68 p. 255).

$$f = \begin{vmatrix} sa_{11} - b_{11} & \cdot\cdot & sa_{1n} - b_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ sa_{n1} - b_{n1} & \cdot\cdot & sa_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix}$$

über in die Form $(s-s_1)p_1 y_1^2 + \ldots + (s-s_n)p_n y_n^2$, deren Determinante

$$(s-s_1) \ldots (s-s_n) p_1 \ldots p_n = \varepsilon^2 f$$

ist (3). Zugleich hat die Determinante $p_1 \ldots p_n$ der transformirten Form $\varphi$ den Werth $\varepsilon^2 \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$, also ist

$$f = (s-s_1) \ldots (s-s_n) \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

d. h. $s_1, \ldots, s_n$ sind die Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades $f = 0$. In der That sind $s_1 \varphi - \psi$, $s_2 \varphi - \psi$, .. singuläre quadratische Formen mit verschwindenden Determinanten und von weniger als $n$ Unbestimmten (§. 13, 10).

II. Setzt man wie oben (10)

$$g_{ik} = a_{i1} c_{1k} + \ldots + a_{in} c_{nk}, \qquad h_{ik} = b_{i1} c_{1k} + \ldots + b_{in} c_{nk}$$

und bezeichnet man die Adjuncte des Elements $c_{ik}$ in $\varepsilon$ durch $\gamma_{ik}$, so hat man

$$p_k \gamma_{ik} = \varepsilon g_{ik} \qquad s_k p_k \gamma_{ik} = \varepsilon h_{ik}$$

folglich $s_k g_{ik} - h_{ik} = 0$ d. h.

$$(s_k a_{i1} - b_{i1}) c_{1k} + \ldots + (s_k a_{in} - b_{in}) c_{nk} = 0$$

Indem man hierin für $i$ die Nummern $1, 2, \ldots, n$ setzt, erhält man für die gesuchten Coefficienten $c_{1k}, c_{2k}, \ldots$ ebensoviel homogene lineare Gleichungen (§. 8, 2). Wenn nun von dem System

$$\begin{matrix} s_k a_{11} - b_{11} & \cdot\cdot & s_k a_{1n} - b_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ s_k a_{n1} - b_{n1} & \cdot\cdot & s_k a_{nn} - b_{nn} \end{matrix}$$

die Determinante $n$ten Grades null, mithin $s_k$ eine Wurzel der Gleichung $f = 0$ ist, und wenn nicht alle Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null sind, so genügen $n-1$ Gleichungen, welche die Proportion $c_{1k} : c_{2k} : \ldots$ und das entsprechende Glied $p_k y_k^2$ (10) bestimmen. Wenn aber alle Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null und nicht alle Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades null sind, so genügen $n-2$ Gleichungen, welche von 2 Coefficienten $c_{1k}$, $c_{2k}$, .. die übrigen abhängig machen.

III. Unter der Voraussetzung, dass alle Subdeterminanten

$(n-1)$ten Grades null sind, ist $df$ null (§. 3, 15) d. h. $s_k$ eine mehr als 1fache Wurzel von $f=0$; unter der Voraussetzung, dass alle Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades null sind, ist $d^2f$ null d. h. $s_k$ eine mehr als 2fache Wurzel von $f=0$; u. s. w. Wenn demnach $s_k$ eine einfache Wurzel von $f=0$ ist, so sind nicht alle Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null; wenn $s_k$ eine zweifache Wurzel von $f=0$ ist, so sind nicht alle Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades null; u. s. w.

IV. Wenn $s_1$ und $s_2$ conjugirt complex sind, so sind auch $p_1y_1{}^2$ und $p_2y_2{}^2$ conjugirt complex, mithin $\varphi$ und $\psi$ durch je $n$ Quadrate darstellbar, welche nicht alle dasselbe Zeichen haben (§. 13, 14). Umgekehrt schliesst man: Wenn eine der Formen $s\varphi-\psi$ definit ist (z. B. $\varphi$ entsprechend $s=\infty$), so ist die Determinante $f$ der Form $s\varphi-\psi$ bei nicht realem $s$ nicht null, alle Wurzeln der Gleichung $f=0$ sind real.

V. Wenn das Element $sa_{qr}-b_{qr}$ des obigen Systems die Adjuncte $f_{qr}$ hat, so ist $f_{rq}=f_{qr}$ (§. 3, 5), $f_{qr}{}^2-f_{qq}f_{rr}$ durch $f$ theilbar, null bei $f=0$ (§. 7, 2), und nach §. 7, 3

$$fdf_{qr}-f_{qr}df = -ds\Sigma a_{\alpha\beta}f_{q\alpha}f_{r\beta} \qquad (\alpha,\beta=1,2,\ldots,n)$$

so dass, wenn $f$ und $df$ bei demselben $s$ null werden, auch $\Sigma a_{\alpha\beta}f_{q\alpha}f_{r\beta}$ verschwindet. Unter der Voraussetzung, dass eine der Formen $s\varphi-\psi$ definit ist, ist eine $\lambda$fache Wurzel der Gleichung $f=0$ zugleich eine $(\lambda-1)$fache Wurzel der Gleichungen $f_{qr}=0$, wie Weierstrass a. a. O. bewiesen hat.

Anmerkung. Wenn die beliebige quadratische Form $\psi$ durch $n$ Quadrate insbesondere mittelst einer orthogonalen Substitution dargestellt werden soll, welche die Form

$$\varphi = x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots+x_n{}^2 \text{ in } y_1{}^2+\ldots+y_n{}^2$$

verwandelt, so hat die zu diesem Zwecke aufzulösende Gleichung $f=0$ nur reale Wurzeln, welche aber nicht nothwendig alle von einander verschieden sind. Auf einer solchen Transformation beruht die Bestimmung der mechanischen Hauptaxen eines gegebenen Körpers*), der säcularen Störungen der Planeten (Laplace

*) Ausgehend von D'Alembert's und Euler's Untersuchungen (Mém. de Berlin 1749—50) hatte Segner (Specimen theoriae turbinum, Halle 1755) die

Mém. de Paris 1772, II p. 293 und 362), der Hauptaxen der Linien und der Flächen 2ter Ordnung (EULER 1748 Introd. II App., POISSON und HACHETTE 1802 J. de l'éc. polyt. Cah. 11 p. 170, BINET 1811 Corresp. sur l'éc. polyt. t. 2 p. 323 u. A.). Die dabei eintretende Realität der Wurzeln der Gleichung $f = 0$ wurde für den dritten Grad von LAGRANGE (Mém. de Berlin 1773 p. 108) bewiesen, für höhere Grade von CAUCHY a. a. O.; auf einem neuen und directen Wege für den dritten Grad von KUMMER (Crelle J. 26 p. 268. Vergl. JACOBI Crelle J. 30 p. 46. BAUER 1868 Crelle J. 71 p. 40), für höhere Grade von BORCHARDT Liouv. J. 12 p. 50 — und zwar unter der Voraussetzung, dass alle Wurzeln der Gleichung $f = 0$ von einander verschieden sind. Die angezeigte Eigenschaft der Gleichung $f = 0$ erkennt man nach SYLVESTER (Philos. Mag. 1852, II p. 138) durch Entwickelung des Products $f(s)\,f(-s)$, welches bei imaginären Werthen von $s$ durchaus positiv ist (vergl. 9). Die Auflösung des allgemeinen Problems ist tiefer ergründet worden von WEIERSTRASS (Berl. Monatsbericht 1868 Mai 18) und KRONECKER (ebendas. und 1874 p. 1).

14*). Eine orthogonale Substitution, welche $x_1^2 + x_2^2 + ..$ in $y_1^2 + y_2^2 + ..$ transformirt, ist ein besonderer Fall einer linearen Substitution, durch welche überhaupt eine quadratische Form der $x$ in sich selbst d. h. in dieselbe Form der $y$ transformirt wird**).

I. Aus dem System

$$\begin{aligned} \varepsilon(a_{11}x_1 + .. + a_{1n}x_n) &= a_{11}y_1 + .. + a_{n1}y_n \\ \cdots & \qquad \cdots \\ \varepsilon(a_{n1}x_1 + .. + a_{nn}x_n) &= a_{1n}y_1 + .. + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

folgt durch Multiplication mit $x_1$, $x_2$, .. und Addition

$$\varepsilon \Sigma_{k\lambda} x_k x_\lambda = \Sigma a_{\lambda k} x_k y_\lambda$$

und durch Multiplication mit $y_1$, $y_2$, .. und Addition

$$\varepsilon \Sigma a_{\lambda k} x_k y_\lambda = \Sigma a_{k\lambda} y_k y_\lambda$$

---

freien Rotationsaxen eines Körpers durch eine cubische Gleichung bestimmt, und den Weg eröffnet, auf welchem EULER weitergegangen ist (Theoria motus corp. sol. 1765 cap. V).

*) ROSANES briefliche Mittheilung 1874 Dec. Vergl. Crelle J. 80 p. 53.

**) Vergl. HERMITE Crelle J. 47 p. 309 und CAYLEY Crelle J. 50 p. 288.

also unter der Bedingung $\varepsilon^2 = 1$

$$\Sigma a_{k\lambda} x_k x_\lambda = \Sigma a_{k\lambda} y_k y_\lambda$$

Wenn nun

$$p_{k\lambda} = \tfrac{1}{2}(a_{k\lambda} + a_{\lambda k}) = p_{\lambda k}$$

$$q_{k\lambda} = \tfrac{1}{2}(a_{k\lambda} - a_{\lambda k}) = -q_{\lambda k} \quad \text{und} \quad q_{kk} = 0$$

$$f(x) = \Sigma p_{k\lambda} x_k x_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

$$f_k(x) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \sum_\lambda p_{k\lambda} x_\lambda$$

gesetzt wird, so können die Grössen $a$ durch die Grössen $p$ und $q$ ausgedrückt werden, dergestalt dass die gegebene quadratische Form $f(x)$ durch die lineare Substitution

$$\varepsilon f_1(x) + \varepsilon \sum_i q_{1i} x_i = f_1(y) + \sum_i q_{i1} y_i$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varepsilon f_n(x) + \varepsilon \sum_i q_{ni} x_i = f_n(y) + \sum_i q_{in} y_i$$

in $f(y)$ übergeht. Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Coefficienten $q$ bleiben unbestimmt, $\varepsilon$ ist entweder 1 oder $-1$.

II. Eine lineare Substitution $x_k = \sum_\lambda c_{k\lambda} y_\lambda$, welche die quadratische Form $f(x) = \Sigma p_{k\lambda} x_k x_\lambda$ in sich selbst d. h. in $f(y)$ transformirt, lässt sich (abgesehn von besondern Fällen) auf folgendem Wege in das System (I)

$$\varepsilon \sum_\lambda a_{k\lambda} x_\lambda = \sum_\lambda a_{\lambda k} y_\lambda \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

überführen. Man setzt

$$\xi_k = x_k + \varepsilon y_k = \sum_\lambda b_{\lambda k} y_\lambda$$

so dass $b_{k\lambda} = c_{k\lambda} + \varepsilon \delta_{k\lambda}$ und $\delta_{k\lambda}$ entweder 1 oder 0 ist, je nachdem $k$ und $\lambda$ gleich oder ungleich sind. Wenn $\Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots$ nicht null ist, so findet man (§. 8, 1) die Umkehrung

$$y_k = \sum_i \beta_{ik} \xi_i$$

Demnach ist

$$f(x) = \Sigma p_{k\lambda}(\xi_k - \varepsilon y_k)(\xi_\lambda - \varepsilon y_\lambda) = f(\xi) - 2\varepsilon \Sigma p_{k\lambda} y_k \xi_\lambda + f(y)$$

und wegen der Voraussetzung $f(x) = f(y)$

$$f(\xi) = 2\varepsilon \Sigma p_{k\lambda} y_k \xi_\lambda = 2\varepsilon \Sigma p_{k\lambda} \beta_{ik} \xi_i \xi_\lambda$$

Setzt man endlich

$$2\varepsilon(p_{1\lambda}\beta_{i1} + \ldots + p_{n\lambda}\beta_{in}) = a_{\lambda i}$$

so erhält man

$$f(\xi) = \Sigma a_{\lambda i}\xi_i\xi_\lambda$$

bei allen $\xi$, folglich $a_{i\lambda} + a_{\lambda i} = 2p_{i\lambda}$. Nun ist

$$\sum_k (a_{k\lambda} + a_{\lambda k})y_k = \sum_{ik} 2p_{k\lambda}\beta_{ik}\xi_i = \sum_i \varepsilon a_{\lambda i}\xi_i = \sum_i \varepsilon a_{\lambda i}(x_i + \varepsilon y_i)$$

folglich

$$\sum_k a_{k\lambda} y_k = \sum_k \varepsilon a_{\lambda k} x_k$$

III. Diese Ueberführung der Substitution (II) in das System (I) ist nicht thunlich, wenn die Determinante $\Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots$ null ist, d. h. wenn die Gleichung $n$ten Grades für $\varrho$

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \varrho & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22} - \varrho & . \\ . & . & \end{vmatrix} = 0$$

die Wurzeln 1 und $-1$ zugleich hat.

Diese Gleichung (vergl. oben 9) ist reciprok*). Denn sie drückt die Bedingung aus, unter der in dem System (II) $x$ durch $\varrho y$ ersetzt werden kann. Aus der Identität $f(x) = f(y)$ folgt aber durch Differentiation das congruente System

$$f_k(y) = c_{1k}f_1(x) + \ldots + c_{nk}f_n(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Und die Bedingung, unter der in diesem System $\varrho x$ durch $y$, mithin $f_k(y)$ durch $\varrho f_k(x)$ ersetzt werden kann, fällt mit der aufgestellten Gleichung zusammen. Das Product der Wurzeln $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots$ ist 1 oder $-1$.

Für das System (I) lautet die entsprechende Gleichung

$$\begin{vmatrix} \varepsilon a_{11} - \varrho a_{11} & \varepsilon a_{12} - \varrho a_{21} & . \\ \varepsilon a_{21} - \varrho a_{12} & \varepsilon a_{22} - \varrho a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = 0$$

welche man sofort als reciproke Gleichung erkennt. Das Product ihrer Wurzeln ist $\varepsilon^n$.

Wenn überhaupt aus den linearen Formen

$$x_i = c_{1i} y_1 + \ldots + c_{ni} y_n$$

*) Hermite und Cayley a. a. O.

das System

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = d_{11}y_1 + \ldots + d_{n1}y_n$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = d_{1n}y_1 + \ldots + d_{nn}y_n$$

gebildet wird, wobei

$$d_{k\lambda} = a_{k1}c_{\lambda 1} + \ldots + a_{kn}c_{\lambda n}$$

so ist die entsprechende Gleichung

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \varrho a_{11} & d_{21} - \varrho a_{12} & . \\ d_{12} - \varrho a_{21} & d_{22} - \varrho a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} - \varrho & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22} - \varrho & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . \\ a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = 0$$

Bei $d_{k\lambda} = \varepsilon a_{k\lambda}$ findet man $\Sigma \pm c_{11}c_{22}\ldots = \varepsilon^n$. Also ist bei geradem $n$ eine Substitution, deren Determinante den Werth $-1$ hat, in dem System (I) nicht enthalten. In andern Fällen*) kann die Gleichung für $\varrho$ die beiden Wurzeln $1$ und $-1$ nur dann haben, wenn ihre Wurzeln nicht alle von einander verschieden sind.

IV. Die angegebene Substitution ist eine orthogonale, wenn

$$p_{k\lambda} = \delta_{k\lambda} \qquad f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

Alsdann wird $\frac{1}{2}(a_{k\lambda} + a_{\lambda k}) = \delta_{k\lambda}$ und

$$\varepsilon \sum_i a_{\lambda i} x_i = \sum_i a_{i\lambda} y_i \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

so dass $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grössen $a$ unbestimmt bleiben. Diese Darstellung steht mit der von Cayley gegebenen in ersichtlichem Zusammenhang. Vergl. auch Veltmann Schlömilch Zeitschrift t. 16 p. 523.

## §. 15. Die Dreiecksfläche und das Tetraedervolum.

1. Wenn $O$ den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn $x$, $y$ und $x_1$, $y_1$ die mit den Axen parallelen Coordinaten der Puncte $A$ und $B$ sind und die Geraden, auf denen $OA$ und $OB$ liegen, durch $r$, $r_1$ bezeichnet werden, wenn ferner die Dreiecksfläche $OAB$ positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Sinn der Drehung, welcher durch die Ordnung der Puncte $O$, $A$, $B$ bestimmt ist, mit dem positiven Sinn der Ebene,

---

*) Vergl. Bachmann Crelle J. 76 p. 331 und Hermite Crelle J. 78 p. 325 für $n = 3$.

in welchem positive Winkel derselben beschrieben werden, übereinstimmt oder nicht übereinstimmt, so ist*)

$$2\,OAB = OA\,.\,OB\sin rr_1 = BO\,.\,OA\sin r_1 r = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} \sin xy$$

**Beweis.** Es ergiebt sich unmittelbar aus der über das Zeichen der Dreiecksfläche gemachten Voraussetzung, dass $OA\,.\,OB \sin rr_1$ und $BO\,.\,OA \sin r_1 r$ auch dem Zeichen nach mit $2\,OAB$ übereinstimmen.

Wenn durch $OA'$, $OB'$ die Abscissen von $A$, $B$, durch $r'$, $x'$, $y'$ die Normalen der Geraden $r$, $x$, $y$ bezeichnet werden, so haben $OA$ und $OA'$ auf $y'$, $OA$ und $A'A$ auf $x'$ gleiche orthogonale Projectionen d. h.

$$OA\cos y'r = OA'\cos xy' \qquad OA\cos yr' = OA'\sin xy$$
$$OA\cos x'r = A'A\cos yx' \qquad -OA\cos xr' = A'A\sin xy$$

Die Distanz $B$ von $OA$ wird durch orthogonale Projection der gebrochnen Linie $OB'B$ auf $r'$ gefunden

$$x_1\cos xr' + y_1\cos yr'$$

Also ist

$$2\,OAB = x_1\,.\,OA\cos xr' + y_1\,.\,OA\cos yr' = (-x_1 y + x y_1)\sin xy$$

Anmerkung. Wenn der Punct $B$ dem Punct $A$ unendlich nahe liegt, so ist

$$r_1 = r + dr \qquad x_1 = x + dx \qquad y_1 = y + dy$$

Indem man den Winkel $xr$ durch $\vartheta$ bezeichnet, erhält man

$$2\,OAB = r^2 d\vartheta = \begin{vmatrix} x & x+dx \\ y & y+dy \end{vmatrix} \sin xy = \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix} \sin xy$$

durch Anwendung von §. 3, 7.

---

*) Diese Formel ist in einem Theorem Varignon's (Mém. de Paris 1719 p. 66) enthalten, dessen genaue geometrische Darstellung nebst der Bestimmung der Zeichen man in Möbius Statik §. 35 und in des Verf. Elementen der Math. Planimetrie §. 9, 8 findet. In der gegenwärtigen Gestalt kommt die Formel bei Monge 1809 vor (J. de l'école polyt. Cah. 15 p. 68), und liegt der Formel für die Fläche eines Polygons zu Grunde, welche Gauss (Werke 4 p. 393) in den Zusätzen zu Schumacher's Uebersetzung von Carnot géom. de position gegeben hat.

2. Wenn das Volum des Tetraeders $OABC$ durch die Kanten $OA$, $OB$, $OC$ und deren Winkel unzweideutig ausgedrückt werden soll, so bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden $x$, $y$, $z$, auf denen die Kanten $OA$, $OB$, $OC$ liegen, und demgemäss die Zeichen dieser Kanten; ferner bestimme man willkürlich die positive Richtung der Normale $z'$ der Ebene $xy$, und demgemäss den positiven Sinn dieser Ebene. Dann ist (1) auch dem Zeichen nach

$$2\,OAB = OA\,.\,OB \sin xy$$

und die Distanz der Spitze $C$ von der Ebene $OAB$

$$OC \cos z z'$$

folglich*)

$$6\,OABC = OA\,.\,OB\,.\,OC \sin xy \cos z z'$$

Wenn zur positiven Richtung von $x$ oder $y$ die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln $OA$ oder $OB$ und $\sin xy$ das Zeichen. Wenn zur positiven Richtung von $z$ die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln $OC$ und $\cos zz'$ das Zeichen. Wenn zur positiven Richtung von $z'$ die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln $\sin xy$ und $\cos zz'$ das Zeichen. Bei jeder Wahl erhält also $OA\,.\,OB\,.\,OC \sin xy \cos zz'$ dasselbe Zeichen.

In gleicher Weise findet man

$$6\,OBAC = OA\,.\,OB\,.\,OC \sin yx \cos z z'$$

Nun ist $\sin yx = - \sin xy$, folglich $OBAC = - OABC$, u. s. w.

3. Der goniometrische Factor, mit welchem das Product der an einer Ecke des Tetraeders liegenden Kanten multiplicirt werden muss, damit man das 6fache Volum des Tetraeders erhält, wird nach Staudt (Crelle J. 24 p. 252) der Sinus der Ecke genannt und durch $\sin xyz$ bezeichnet, wenn die Kanten auf den Geraden $x$, $y$, $z$ liegen. Nach (2) ist

$$\sin xyz = \sin yzx = \cdots = - \sin yxz = - \sin xzy = \cdots$$

Das Parallelepiped, dessen Kanten auf $x$, $y$, $z$ positive Einheiten sind, hat das Volum (2)

---

*) Vergl. Möbius Statik §. 63 und des Verf. Elem. d. Math. Trigonometrie §. 6, 14.

$$\sin yz \cos xx' = \sin zx \cos yy' = \sin xy \cos zz' = \sin xyz$$

wenn die positiven Normalen der coordinirten Ebenen $yz$, $zx$, $xy$ durch $x'$, $y'$, $z'$ bezeichnet werden.

Aus sphärisch-trigonometrischen Gründen hat man noch

$$\sin xyz = \sin xy \sin xy^{\wedge}z = \sin xy \sin yz \sin xy^{\wedge}yz$$

wenn $xy^{\wedge}z$ und $xy^{\wedge}yz$ die mit der Ebene $xy$ von der Geraden $z$ und von der Ebene $yz$ gebildeten Winkel bedeuten, und

$$\cos zx - \cos xy \cos yz = \sin xy \sin yz \cos xy^{\wedge}yz$$

Aus den beiden Gleichungen findet man *)

$$\begin{aligned} \sin^2 xyz &= \sin^2 xy \sin^2 yz - (\cos zx - \cos xy \cos yz)^2 \\ &= 1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2 \cos xy \cos yz \cos zx \\ &= 4 \sin \frac{xy + xz + yz}{2} \sin \frac{-xy + xz + yz}{2} \sin \frac{xy - xz + yz}{2} \sin \frac{xy + xz - yz}{2} \end{aligned}$$

Die Grösse $\sin^2 xyz$ liegt zwischen 0 und 1, und erreicht die untere Grenze nur dann, wenn die Geraden $x$, $y$, $z$ mit einer Ebene parallel sind, die obere Grenze nur dann, wenn die Geraden normal zu einander sind. Zugleich ist (§. 5, 6)

$$\sin^2 xyz = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

analog der Gleichung

$$\sin^2 xy = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}.$$

4. I. Coordinaten einer Strecke heissen die Projectionen derselben auf je eine von 3 coordinirten Axen durch Ebenen, die mit den beiden andern Axen parallel sind. Coordinaten einer Planfigur heissen die Projectionen derselben durch Gerade, die mit den beiden andern Ebenen parallel sind. Wenn insbesondere die Strecke eine Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, oder die Planfigur ein Kräftepaar bedeutet, so sind ihre Coordinaten Componenten (composantes) des resultirenden mechanischen Elements.

II. Das Prisma, dessen Basis und Kante in Bezug auf die

---

*) Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158. Vergl. des Verf. Elem. der Math. Trigonometrie §. 8, 11.

Axen $x$, $y$, $z$ durch ihre Coordinaten $L\sin yz$, $M\sin zx$, $N\sin xy$ und $A$, $B$, $C$ gegeben sind, hat das Volum

$$(AL + BM + CN)\sin xyz\,{}^{*})$$

**Beweis.** Das die Basis $p$ auf $yz$ parallel mit $x$ projicirende Prisma hat den Normalschnitt

$$p\cos xn = L\sin yz\cos xx' = L\sin xyz \quad (3)$$

u. s. w., wenn durch $x'$, $y'$, $z'$, $n$ die positiven Normalen der coordinirten Ebenen und der Basis-Ebene bezeichnet werden. Die Höhe des gegebenen Prisma wird durch orthogonale Projection der aus $A$, $B$, $C$ bestehenden gebrochnen Linie auf $n$ gefunden

$$A\cos xn + B\cos yn + C\cos zn$$

Also hat das Prisma das Volum

$$Ap\cos xn + Bp\cos yn + Cp\cos zn = (AL + BM + CN)\sin xyz$$

III. Wenn in Bezug auf die coordinirten Axen $x$, $y$, $z$ mit dem gemeinschaftlichen Nullpunct $O$ die Puncte $A$, $B$, $C$ die Coordinaten $x$, $y$, $z$; $x_1$, $y_1$, $z_1$; $x_2$, $y_2$, $z_2$ haben, so ist auch dem Zeichen nach **)

$$6\,OABC = \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz$$

**Beweis.** Die Coordinaten der Fläche $2\,OBC$ sind (1)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \sin yz, \qquad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \sin zx, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \sin xy$$

Die Coordinaten der Strecke $OA$ sind $x$, $y$, $z$. Durch Composition dieser Coordinaten mit den Coefficienten von $\sin yz$, $\sin zx$, $\sin xy$ erhält man (II) die angegebene Determinante.

Anmerkung. Vermöge der Sätze (1) und (4) können die einfachsten der in §. 3, 9 aufgestellten Identitäten geometrisch gedeutet werden.

---

*) S. den Aufsatz des Verf. Leipz. Berichte 1873 p. 525, welcher die Anwendung dieses Lemma bei der Reduction der einen starren Körper angreifenden Kräfte zeigt.

**) Lagrange sur les pyr. 14. Monge und Möbius a. a. O. Gauss Disq. generales circa superficies curvas 2, VII. Gauss und Möbius haben das Zeichen bestimmt. Vergl. den Aufsatz des Verf. Crelle J. 73 p. 94.

5. Wenn die Puncte $A$, $B$, $C$ in Bezug auf zwei Axen der Ebene $ABC$ durch die Coordinaten $x$, $y$; $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$ gegeben sind, so ist*)

$$2ABC = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} \sin xy$$

**Beweis.** Da die Strecken $AB$, $AC$ die Coordinaten $x_1 - x$, $y_1 - y$; $x_2 - x$, $y_2 - y$ haben, so ist (1)

$$2ABC = \begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x \\ y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} \sin xy$$

Wie in §. 3, 3 erhält man statt dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ x & x_1 - x & x_2 - x \\ y & y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Anmerkung. So oft man in der Formel $ABC$ zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt die Dreiecksfläche das Zeichen. In der That erleidet die Determinante der Coordinaten durch Permutation von zwei Colonnen einen Zeichenwechsel (§. 2, 3). Durch Entwickelung der Determinante erhält man die bekannte Identität $ABC = OBC + OCA + OAB$.

Als Bedingung, unter welcher $A$ auf der Geraden $BC$ liegt, d. h. als Gleichung der Geraden durch $B$ und $C$ ergiebt sich, weil $ABC = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

6. Wenn die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ in Bezug auf drei Axen durch die Coordinaten $x, y, z$; $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$ gegeben sind, so ist

$$6ABCD = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \sin xyz$$

*) Diese bekannte Formel und die entsprechende des folg. Art. kommt in dieser Gestalt bei Cayley Cambr. math. J. 2 p. 268, Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23 u. A. vor.

**Beweis.** Die Coordinaten der Strecken $AB$, $AC$, $AD$ sind $x_1-x$, $y_1-y$, $z_1-z$; $x_2-x$, $y_2-y$, $z_2-z$; u. s. w. Daher ist (4)

$$6ABCD = \begin{vmatrix} x_1-x & x_2-x & x_3-x \\ y_1-y & y_2-y & y_3-y \\ z_1-z & z_2-z & z_3-z \end{vmatrix} \sin xyz$$

Durch Transformation der Determinante erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ x & x_1-x & x_2-x & x_3-x \\ y & y_1-y & y_2-y & y_3-y \\ z & z_1-z & z_2-z & z_3-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Anmerkung. So oft man in der Formel $ABCD$ zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt das Tetraedervolum zugleich mit der dafür gefundenen Determinante das Zeichen.

Unter der Bedingung $ABCD = 0$ liegt $A$ auf der Ebene $BCD$, mithin ist die Gleichung der Ebene $BCD$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

wovon die geometrische Bedeutung unmittelbar wahrzunehmen ist.

7. Die Lage des Punctes $P$ in Bezug auf das Tetraeder $ABCD$ ist durch die Tetraederverhältnisse

$$BCDP : CADP : ABDP : PABC$$

bestimmt*). Die Puncte $P$, $A$, $B$, $C$, $D$ haben in Bezug auf drei

---

*) Lagrange sur les pyr. 28. Grössen, welche wie diese Tetraeder sich verhalten, werden bei Möbius (baryc. Calcul) als barycentrische Coordinaten des Punctes $P$ in Bezug auf Fundamentalpyramide $ABCD$ angewendet, bei Feuerbach (Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 5) als coordinirte Coefficienten, bei Plücker (Crelle J. 5 p. 1) als Tetraeder-Coordinaten (in der Ebene Dreieck-Coordinaten).

beliebige Axen die Coordinaten $x, y, z$; $x_1, y_1, z_1$; u. s. w. Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot\cdot & 1 \\ x & x_1 & \cdot\cdot & x_4 \\ y & y_1 & \cdot\cdot & y_4 \\ z & z_1 & \cdot\cdot & z_4 \\ u & u_1 & \cdot\cdot & u_4 \end{vmatrix} = \mu u + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_4 u_4$$

verschwindet, wenn die letzte Zeile mit einer andern übereinstimmt, so hat man

$$\begin{aligned} \mu \; + \mu_1 \;\; + \cdot\cdot + \mu_4 \;\; &= 0 \\ \mu x + \mu_1 x_1 + \cdot\cdot + \mu_4 x_4 &= 0 \\ \mu y + \mu_1 y_1 + \cdot\cdot + \mu_4 y_4 &= 0 \\ \mu z + \mu_1 z_1 + \cdot\cdot + \mu_4 z_4 &= 0 \end{aligned}$$

Der Punct $P$ erscheint demnach als Schwerpunct der Puncte

$$\mu_1 . A, \qquad \mu_2 . B, \qquad \mu_3 . C, \qquad \mu_4 . D$$

d. h. der in $A$, $B$, $C$, $D$ befindlichen Massen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, und wird dadurch construirt, dass man je nach gegebenen Verhältnissen die Strecke $AB$ in $N$, die Strecke $NC$ in $O$, die Strecke $OD$ in $P$ theilt. Vergl. des Verf. Elem. d. Math., Stereometrie §. 11, 5. Die partialen Determinanten $\mu$, $\mu_1$, .. verhalten sich zu einander wie die Tetraeder $ABCD$, $BCDP$, .. (6), während $ABCD : BCDP = AA_1 : A_1P$, wenn die Gerade $AP$ mit der Ebene $BCD$ den Punct $A_1$ gemein hat, u. s. w.

Aus den obigen Gleichungen folgt

$$\mu(a + bx + cy + dz) + \cdots + \mu_4(a + bx_4 + cy_4 + dz_4) = 0$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung gefunden wird, indem man die Ebene $a + bx' + cy' + dz' = 0$ vorstellt, welche von den durch $P$, $A$, .. parallel mit $z$ gezogenen Geraden in $P'$, $A'$, .. geschnitten wird. Dann ist

$$\begin{aligned} a + bx + cy + dz' &= 0 \\ a + bx + cy + dz \; &= d(z - z') = d . P'P \end{aligned}$$

u. s. w., folglich

$$\mu . P'P + \mu_1 . A'A + \mu_2 . B'B + \mu_3 . C'C + \mu_4 . D'D = 0$$

wobei unter $P'$, $A'$, .. die Durchschnitte irgend einer Schaar von

Parallelen, die man durch $P$, $A$, .. gezogen hat, mit einer beliebigen Ebene verstanden werden können.

8. Sind $A_1$, $B_1$, $C_1$ die Mitten von $AD$, $BD$, $CD$, so wird das Tetraeder $ABCD$ von den Ebenen $A_1BC$, $AB_1C$, $ABC_1$ halbirt, und der Schwerpunct $P$ des Tetraeders $ABCD$ liegt auf den genannten Halbirungsebenen, so dass

$$A_1BCP = 0, \quad AB_1CP = 0, \quad ABC_1P = 0$$

Nun hat $A_1$ die Coordinaten $\frac{1}{2}(x_1 + x_4)$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_4)$, $\frac{1}{2}(z_1 + z_4)$, folglich ist (6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_4) & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_4) & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}(z_1 + z_4) & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}z_1 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}x_4 & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}y_4 & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}z_4 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

oder $-\mu_4 + \mu_1 = 0$. Ebenso ist $-\mu_4 + \mu_2 = 0$, $-\mu_4 + \mu_3 = 0$, daher $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = -\frac{1}{4}\mu$ und

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \; y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \; z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$$

d. h. der Schwerpunct des Tetraeders ist die Spitze von 4 gleichen Tetraedern, deren Basen die Flächen des Tetraeders sind, und der Schwerpunct von 4 gleichen Massen, welche in den Ecken des Tetraeders ihre Schwerpuncte haben*).

9. Wenn die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks in Bezug auf ein System von zwei Axen gegeben sind, so findet man die Fläche des Dreiecks auf folgende Weise**). Die Coefficienten der Gleichungen seien $a : b : c$, $a_1 : b_1 : c_1$, $a_2 : b_2 : c_2$, d. h. für jeden Punct der ersten Seite, dessen Coordinaten $x'$, $y'$ sind, hat man

---

*) Roberval. S. Lagrange Mécanique I sect. V, 3 und sur les pyr. 31 — 35.

**) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23. Zu demselben Resultat und dem entsprechenden des folg. Art. war auf einem andern Wege Minding Crelle J. 5 p. 397 gelangt.

$a + bx' + cy' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpuncte $x$, $y$; $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$ nebst 3 Hülfsgrössen $p$, $p_1$, $p_2$ sind durch die linearen Systeme

$$\begin{array}{lll} a + bx + cy = p & a + bx_1 + cy_1 = 0 & a + bx_2 + cy_2 = 0 \\ a_1 + b_1x + c_1y = 0 & a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 = p_1 & a_1 + b_1x_2 + c_1y_2 = 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y = 0 & a_2 + b_2x_1 + c_2y_1 = 0 & a_2 + b_2x_2 + c_2y_2 = p_2 \end{array}$$

bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punct $(x, y)$ auf der zweiten und dritten, aber nicht auf der ersten Geraden liegt, u. s. w. Nach §. 6, 3 ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix}$$

Nach §. 3, 7 ist

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & b & c \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

u. s. w. Wenn man nun die Determinante der Coefficienten durch $R$ und die Adjuncten der ersten Colonne durch $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ bezeichnet, so ist

$$R = p\alpha = p_1\alpha_1 = p_2\alpha_2$$

daher

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & b & p_2 \end{vmatrix} = pp_1p_2 = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\alpha_2}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{\alpha\alpha_1\alpha_2}$$

mithin (5) die gesuchte doppelte Dreiecksfläche $= \dfrac{R^2 \sin xy}{\alpha\alpha_1\alpha_2}$

Nachdem man auf bekannte Weise die Höhen des Dreiecks, d. h. die Abstände der Puncte $(x, y)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ von der ersten, zweiten, dritten Geraden berechnet hat, findet man die Seiten des Dreiecks, wenn man die gefundene doppelte Dreiecksfläche durch die Höhen dividirt.

Wenn die Determinante der Coefficienten verschwindet, ohne dass die Elemente einer Zeile zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Elemente einer andern Zeile, so gehen die 3 Geraden durch einen endlich fernen Punct.

**10.** Wenn die Gleichungen der Flächen eines Tetraeders in Bezug auf ein System von 3 Axen gegeben sind, so wird das Volum des Tetraeders auf dieselbe Weise gefunden, wie die Dreiecksfläche aus den Seiten. Die Coefficienten der Gleichungen seien $a : b : c : d$, $a_1 : b_1 : c_1 : d_1$, $a_2 : b_2 : c_2 : d_2$, $a_3 : b_3 : c_3 : d_3$, d. h. für jeden Punct $(x', y', z')$ der ersten Fläche hat man $a + bx' + cy' + dz' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpuncte $x, y, z$; $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$ nebst den Hülfsgrössen $p, p_1, p_2, p_3$ sind durch 4 Systeme von je 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b x + c y + d z &= p \\ a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z &= 0 \\ a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z &= 0 \\ a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punct $(x, y, z)$ auf der zweiten, dritten, vierten, aber nicht auf der ersten Ebene liegt, u. s. w. Dann ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & b & c & d \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$R = p\alpha = p_1\alpha_1 = p_2\alpha_2 = p_3\alpha_3$$

folglich

$$pp_1p_2p_3 = \frac{R^4}{\alpha\alpha_1\,\alpha_2\alpha_3} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\,\alpha_2\alpha_3}$$

und das gesuchte 6fache Tetraedervolum $(6) = \frac{R^3 \sin xyz}{\alpha\alpha_1\,\alpha_2\alpha_3}$. Hieraus lassen sich mit Hülfe der Höhen des Tetraeders seine Flächen berechnen.

Wenn die Determinante der Coefficienten verschwindet, ohne dass zwei Zeilen proportionale Elemente enthalten, so gehen die 4 Ebenen durch einen endlich fernen Punct.

## §. 16. Producte von Strecken, Dreiecken, Tetraedern.

1. Durch $A$, $A_1$, $A_2$, .. und $B$, $B_1$, $B_2$, .. werden 2 Systeme von Puncten, und durch $c_{ik}$ das Product von 2 Strecken $AA_i$, $BB_k$ der Geraden $r$, $\varrho$ mit dem Cosinus des Winkels dieser Geraden bezeichnet. Um das Product $c_{ik}$ zu berechnen, bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden $r$, $\varrho$ und demgemäss die Werthe und Zeichen der Strecken und des Cosinus. Wenn als positive Richtung einer Geraden die entgegengesetzte angenommen wird, so wechseln eine Strecke und der Cosinus das Zeichen. Also erhält bei jeder Wahl das Product $c_{ik}$ dasselbe Zeichen.

Sind die Puncte $A$, $A_i$, $B$, $B_k$ durch ihre orthogonalen Coordinaten

$$\begin{matrix} a & b & c & \qquad & \alpha & \beta & \gamma \\ x_i & y_i & z_i & \qquad & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{matrix}$$

in Bezug auf die Axen $x$, $y$, $z$ gegeben, bei denen $\sin xyz = 1$, so findet man durch orthogonale Projection der Strecke $AA_i$ und ihrer Coordinaten $x_i - a$, .. auf die Gerade $\varrho$

$$AA_i \cos r\varrho = (x_i - a)\cos x\varrho + (y_i - b)\cos y\varrho + (z_i - c)\cos z\varrho$$

folglich

$$\text{(I)} \quad AA_i \,.\, BB_k \cos r\varrho = (x_i - a)(\xi_k - \alpha) + (y_i - b)(\eta_k - \beta) + (z_i - c)(\zeta_k - \gamma)$$

$$\text{(II)} \quad \cos r\varrho = \cos xr \cos x\varrho + \cos yr \cos y\varrho + \cos zr \cos z\varrho$$

Nun ist identisch

$$2(x_i - a)(\xi_k - \alpha) = (\xi_k - a)^2 + (x_i - \alpha)^2 - (\alpha - a)^2 - (\xi_k - x_i)^2$$

u. s. w., folglich *)

$$\text{(III)} \quad 2AA_i \,.\, BB_k \cos r\varrho = AB_k^2 + A_iB^2 - AB^2 - A_iB_k^2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & AB^2 & AB_k^2 \\ 1 & A_iB^2 & A_iB_k^2 \end{vmatrix}$$

2. Nach §. 6, 1 hat man nun

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots = \begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b & z_1 - c \\ x_2 - a & y_2 - b & z_2 - c \\ . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 - \alpha & \eta_1 - \beta & \zeta_1 - \gamma \\ \xi_2 - \alpha & \eta_2 - \beta & \zeta_2 - \gamma \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

*) Vergl. Carnot Géom. de pos. 354. Mém. sur la relation etc. 27.

Daher ist die Determinante $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots$ null, wenn sie 4ten oder höhern Grades ist. Indem man $c_{ik}$ durch $\cos_{ik}$ ersetzt, wenn die Strecken Einheiten sind, erhält man die trigonometrischen Gleichungen

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} c_{44} = 0 \qquad \Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} \cos_{33} \cos_{44} = 0$$

für beliebige 2mal 5 Puncte und 2mal 4 Gerade.

Nach dem Zusammenfallen des zweiten Systems mit dem ersten ist $c_{ik} = c_{ki}$, und man findet aus der ersten Gleichung den Zusammenhang unter den Strecken, welche 5 Puncte verbinden (vergl. unten 13), während die andre Gleichung der analytischen Geometrie folgende Ausdrücke liefert:

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} \cos r\varrho & \cos x\varrho & \cos y\varrho & \cos z\varrho \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Die Gleichung (I) enthält den Zusammenhang unter den von 4 Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln, unter den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks, unter den Flächenwinkeln eines Tetraeders (Carnot Géom. de pos. 350). Wenn insbesondere $x$, $y$, $z$, $r$ die Richtungen der Kanten $OA$, $OB$, $OC$ und des Diameter $OD$ der dem Tetraeder $OABC$ umgeschriebenen Kugel bedeuten, wenn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, so hat man

$$\frac{\cos xr}{a} = \frac{\cos yr}{b} = \frac{\cos zr}{c} = \frac{1}{d}$$

$$\begin{vmatrix} d^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b & \cos xy & 1 & \cos yz \\ c & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zur Berechnung des Diameter der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Elementen einer Ecke (Lagrange sur les pyr. 21. Legendre élém. de géom. Note V).

Die Gleichung (II) dient zur Bestimmung des Winkels von zwei Geraden durch die Winkel, welche dieselben mit den coordinirten Axen bilden. MAGNUS anal. Geom. des Raumes §. 9 (7). Vergl. den Aufsatz des Verf. in Crelle J. 46 p. 145.

Wenn alle Puncte auf der Ebene $xy$ liegen, und alle Geraden mit dieser Ebene parallel sind, so hat man

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22}\, c_{33} = 0 \qquad \Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} \cos_{33} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \cos r\varrho & \cos x\varrho & \cos y\varrho \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Ferner hat man mit Rücksicht auf §. 15, 4 und 6

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22}\, c_{33} = 36\, AA_1\, A_2 A_3 \,.\, BB_1\, B_2\, B_3$$

$$\Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} \cos_{33} = \sin r_1\, r_2\, r_3 \sin \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3$$

für beliebige 2mal 4 Puncte und 2mal 3 Gerade *).

Nach dem Zusammenfallen der beiden Tetraeder ist $c_{ik} = c_{ki}$ und man erhält für $36\, AA_1\, A_2\, A_3{}^2$ die von LAGRANGE sur les pyr. 15 gegebene und von LEGENDRE élém. de géom. Note V reproducirte Formel.

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} \cos ff' & \cos fg' & \cos fh' \\ \cos gf' & \cos gg' & \cos gh' \\ \cos hf' & \cos hg' & \cos hh' \end{vmatrix} = \sin fgh \sin f'g'h'$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos fg & \cos fh \\ \cos fg & 1 & \cos gh \\ \cos fh & \cos gh & 1 \end{vmatrix} = \sin^2 fgh \ (§. 15, 3)$$

und bei $\sin xyz = 1$

$$\begin{vmatrix} \cos xf & \cos xg & \cos xh \\ \cos yf & \cos yg & \cos yh \\ \cos zf & \cos zg & \cos zh \end{vmatrix} = \sin fgh \ (§. 15, 4)$$

Wenn alle Puncte auf der Ebene $xy$ liegen und alle Geraden mit dieser Ebene parallel sind, so bleibt

*) Diese beiden Sätze hat STAUDT 1842 gegeben Crelle J. 24 p. 252. Der zweite Satz, der in dem besondern Fall $\sin r_1\, r_2\, r_3 = 1$ früher bei GAUSS vorkommt (Disq. gener. circa superficies 2, VI), ist von CAUCHY reproducirt worden Exerc. d'Anal. 4 p. 41.

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 4\,AA_1A_2\,.\,BB_1B_2$$

für 2 Dreiecke einer Ebene und

$$\begin{vmatrix} \cos_{11} & \cos_{12} \\ \cos_{21} & \cos_{22} \end{vmatrix} = \sin r_1 r_2 . \sin \varrho_1 \varrho_2$$

für 2 Paare von Geraden, die mit einer Ebene parallel sind. Zufolge dieser Gleichung ist bei 3 beliebigen Winkeln $\lambda$, $\mu$, $\nu$ einer Ebene

$$\cos(\lambda - \mu)\cos\nu - \cos(\lambda - \nu)\cos\mu = \sin\lambda\sin(\mu - \nu)$$

insbesondere

$$\begin{vmatrix} \cos xf & \cos xg \\ \cos yf & \cos yg \end{vmatrix} = \sin fg$$

unter der Voraussetzung $\sin xy = 1$.

4. Bei der Entwickelung der Determinante 2ten Grades $\Sigma \pm c_{11} c_{22}$ ist (§. 15, 1 und 4)

$$\begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b \\ x_2 - a & y_2 - b \end{vmatrix} = 2\,AA_1A_2 \cos zn \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 - \alpha & \eta_1 - \beta \\ \xi_2 - \alpha & \eta_2 - \beta \end{vmatrix} = 2\,BB_1B_2 \cos z\nu$$

indem durch $n$ und $\nu$ die positiven Normalen der Ebenen $AA_1A_2$ und $BB_1B_2$ bezeichnet werden. Nun ist (1)

$$\cos xn \cos x\nu + \cos yn \cos y\nu + \cos zn \cos z\nu = \cos n\nu$$

folglich*)

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} = 4\,AA_1A_2\,.\,BB_1B_2 \cos n\nu$$

Und wenn die von $A$ und $B$ anfangenden Strecken Einheiten der Geraden $f$, $g$, $f'$, $g'$, und $n$, $n'$ die positiven Normalen der Stellungen $fg$, $f'g'$ sind, so ist $2\,AA_1A_2 = \sin fg$, u. s. w., folglich**)

$$\begin{vmatrix} \cos ff' & \cos fg' \\ \cos gf' & \cos gg' \end{vmatrix} = \sin fg \sin f'g' \cos nn'$$

5. Das 4fache Product der Dreiecke $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ mit dem Cosinus des Winkels ihrer Ebenen ist ebensowenig zweideutig als die dafür gegebene Determinante. Nach beliebiger Annahme der positiven Richtungen ihrer Normalen und nach übereinstimmender

*) Staudt a. a. O.

**) Gauss und Staudt a. a. O.

Annahme des positiven Sinnes jeder Ebene d. h. des Sinnes der Drehung, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, sind die Zeichen der Dreiecke und des Winkels bestimmt, welchen die eine Ebene beschreiben muss, bis dass ihre positive Normale mit der positiven Normale der andern Ebene zusammenfällt. Wenn als die positive Richtung einer Normale die entgegengesetzte angenommen wird, so wechseln zwei Factoren des obigen Products das Zeichen, nämlich ein Dreieck und der Cosinus des Flächenwinkels, weil der Winkel um 180° sich ändert; also bleibt das Product unverändert.

Das 4fache Product der Dreiecke $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ mit dem Cosinus des Flächenwinkels ist $4\,AA_1A_2\,.\,NN_1N_2$, wenn man durch $NN_1N_2$ die Projection von $BB_1B_2$ auf die Ebene $AA_1A_2$ bezeichnet. Die aus den Paaren $AA_1$, $AA_2$ und $NN_1$, $NN_2$ gebildete Determinante $\Sigma \pm c_{11}c_{22}$ ist von der aus den Paaren $AA_1$, $AA_2$ und $BB_1$, $BB_2$ gebildeten nicht verschieden, weil $NN_1$ und $BB_1$ durch dieselben Ebenen auf $AA_1$ projicirt werden, u. s. w. (Staudt).

Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \cos af & \cos ag & \cos ah \\ \cos bf & \cos bg & \cos bh \\ \cos cf & \cos cg & \cos ch \end{vmatrix} = \sin abc \sin fgh$$

$$\begin{vmatrix} \cos af & \cos ag \\ \cos bf & \cos bg \end{vmatrix} = \sin ab \sin fg \cos ab^{\wedge}fg$$

haben zufolge der angegebenen Werthe die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie unverändert bleiben, jene, während die gegenseitige Lage der Raumwinkel $abc, fgh$ beliebig verändert wird, diese, während bei unveränderter Grösse des Flächenwinkels $ab^{\wedge}fg$ die gegenseitige Lage der Winkel $ab$, $fg$ beliebig verändert wird (Cauchy).

6. Wenn man die Adjuncte des Elements $c_{ik}$ in der Determinante $\Sigma \pm c_{11}c_{22}c_{33}$ durch $\gamma_{ik}$ bezeichnet, so hat man nach §. 7, 1

$$\Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} = (\Sigma \pm c_{11}c_{22}c_{33})^2 = (36\,AA_1A_2A_3\,.\,BB_1B_2B_3)^2$$

Die Elemente $\gamma_{11}, \ldots$ sind Flächenproducte von der in (4) betrachteten Art, nämlich

$$\gamma_{11} = \Sigma \pm c_{22}c_{33} = 4\,AA_2A_3\,.\,BB_2B_3 \cos_{11}$$
$$\gamma_{12} = \Sigma \pm c_{23}c_{31} = 4\,AA_2A_3\,.\,BB_3B_1 \cos_{12}$$

u. s. w., wo $\cos_{11}$, $\cos_{12}$, .. die Cosinus der von den Ebenen der Flächen $AA_2A_3$ und $BB_2B_3$, $AA_2A_3$ und $BB_3B_1$, .. gebildeten Flächenwinkel bedeuten.

Wenn das zweite Tetraeder mit dem ersten zusammenfällt, und wenn die Flächen $2AA_2A_3$, $2AA_3A_1$, $2AA_1A_2$ die Werthe $f_1$, $f_2$, $f_3$ haben, so findet man

$$(6AA_1A_2A_3)^4 = f_1^2f_2^2f_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

$$(6AA_1A_2A_3)^2 = f_1f_2f_3 \sin_{123} \text{*)}$$

wobei $\sin_{123}$ den Sinus der Ecke (§. 15, 3) bedeutet, deren Kanten die positiven Normalen der Ebenen $AA_2A_3$, $AA_3A_1$, $AA_1A_2$ sind, und welche der von den Geraden $AA_1$, $AA_2$, $AA_3$ gebildeten Ecke des Tetraeders so zugeordnet ist, dass die Kugelschnitte der beiden Ecken Polarfiguren sind.

7. Das Product der Summen der Sinus von Ecken oder Winkeln zweier Systeme wird nach §. 6, 1 abgeleitet aus

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya & \cos za \\ 1 & \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -\cos xa' & -\cos ya' & -\cos za' \\ 1 & -\cos xb' & -\cos yb' & -\cos zb' \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\cos aa' & 1-\cos ab' & . \\ 1-\cos ba' & 1-\cos bb' & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin^2\frac{1}{2}aa' & 2\sin^2\frac{1}{2}ab' & . \\ 2\sin^2\frac{1}{2}ba' & 2\sin^2\frac{1}{2}bb' & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

Wenn jedes System 5 und mehr Gerade hat, so ist die resultirende Determinante null. Z. B.

$$\Sigma \pm \sin^2\tfrac{1}{2}aa' \sin^2\tfrac{1}{2}bb' \sin^2\tfrac{1}{2}cc' \sin^2\tfrac{1}{2}dd' \sin^2\tfrac{1}{2}ee' = 0$$

Für 2mal 4 Gerade findet man (3)

$$-(\sin bcd + \sin cad + \sin abd - \sin abc)(\sin b'c'd' + \sin c'a'd' + \sin a'b'd' - \sin a'b'd')$$
$$= 16\,\Sigma \pm \sin^2\tfrac{1}{2}aa' \sin^2\tfrac{1}{2}bb' \sin^2\tfrac{1}{2}cc' \sin^2\tfrac{1}{2}dd' \text{ **)}$$

---

*) Diese Gleichung ist von LAGRANGE's Gleichung (sur les pyr. 17) nicht wesentlich verschieden. Vergl. BRETSCHNEIDER Geometrie 677 und des Verf. Elem. d. Math. Trigonometrie §. 6, 16.

**) Ein entsprechender polyedrometrischer Satz ist von JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 42 ohne genauere Angabe der Zeichen aufgestellt und bewiesen worden.

Bei 2mal 3 Geraden ist

$$\begin{vmatrix} 1-\cos aa' & 1-\cos ab' & . \\ 1-\cos ba' & 1-\cos bb' & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & . \\ 1 & 1-\cos aa' & . \\ 1 & 1-\cos ba' & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & .\,. \\ 1 & -\cos aa' & .\,. \\ 1 & -\cos ba' & .\,. \\ . & . & .\,. \end{vmatrix}$$

und nach Weglassung der Glieder

$$\begin{vmatrix} \cos xa & .\,. \\ \cos xb & .\,. \\ \cos xc & .\,. \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\cos xa' & .\,. \\ -\cos xb' & .\,. \\ -\cos xc' & .\,. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos aa' & .\,. \\ -\cos ba' & .\,. \\ -\cos ca' & .\,. \end{vmatrix}$$

bleibt übrig

$$(1\,x\,y)(1\,x\,y)' + (1\,x\,z)(1\,x\,z)' + (1\,y\,z)(1\,y\,z)'$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\cos aa' & -\cos ab' & -\cos ac' \\ 1 & -\cos ba' & -\cos bb' & -\cos bc' \\ 1 & -\cos ca' & -\cos cb' & -\cos cc' \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sin^2\tfrac{1}{2}aa' & \sin^2\tfrac{1}{2}ab' & \sin^2\tfrac{1}{2}ac' \\ 1 & \sin^2\tfrac{1}{2}ba' & \sin^2\tfrac{1}{2}bb' & \sin^2\tfrac{1}{2}bc' \\ 1 & \sin^2\tfrac{1}{2}ca' & \sin^2\tfrac{1}{2}cb' & \sin^2\tfrac{1}{2}cc' \end{vmatrix}$$

Wenn insbesondere $a$, $b$, $c$ und $a'$, $b'$, $c'$ auf je einer Ebene liegen, deren positive Normalen $n$ und $n'$ sind, so wird die linke Seite (4)

$$(\sin bc + \sin ca + \sin ab)(\sin b'c' + \sin c'a' + \sin a'b')\cos nn'$$

Für 2mal 3 Gerade einer Ebene findet man unmittelbar

$$(\sin bc + \sin ca + \sin ab)(\sin b'c' + \sin c'a' + \sin a'b')$$
$$= 8\Sigma \pm \sin^2\tfrac{1}{2}aa' \sin^2\tfrac{1}{2}bb' \sin^2\tfrac{1}{2}cc'$$

8. Wenn man durch $a$, $b$, $c$ die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien $OA$, $OB$, $OC$ eines Kreises liegen, durch $r$ die Länge eines Radius und durch $f$, $g$, $h$ die Quadrate der Seiten $BC$, $CA$, $AB$ des eingeschriebenen Dreiecks $ABC$; wenn man beide Seiten der Gleichung (7)

$$(\sin bc + \sin ca + \sin ab)^2 = 8\begin{vmatrix} 0 & \sin^2\tfrac{1}{2}ab & \sin^2\tfrac{1}{2}ac \\ \sin^2\tfrac{1}{2}ab & 0 & \sin^2\tfrac{1}{2}bc \\ \sin^2\tfrac{1}{2}ac & \sin^2\tfrac{1}{2}bc & 0 \end{vmatrix}$$

mit $8r^6$ multiplicirt und bemerkt, dass

$$r^2 \sin ab = 2\, OAB \qquad 4\, r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab = h$$

u. s. w., so erhält man die altbekannte Gleichung

$$(4\, r\, .\, ABC)^2 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix} = fgh \,.$$

Wenn man durch $a$, $b$, $c$, $d$ die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ einer Kugel liegen, durch $r$ die Länge eines Radius, durch $f$, $g$, $h$ die Quadrate der Kanten $BC$, $CA$, $AB$, durch $f'$, $g'$, $h'$ die Quadrate der gegenüberliegenden Kanten $AD$, $BD$, $CD$ des jener Kugel eingeschriebenen Tetraeders $ABCD$; wenn man beide Seiten der Gleichung (7)

$$(\sin bcd + \sin cad + \sin abd - \sin abc)^2$$

$$= -16 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} ab & \sin^2 \tfrac{1}{2} ac & \sin^2 \tfrac{1}{2} ad \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} ab & 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} bc & \sin^2 \tfrac{1}{2} bd \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} ac & \sin^2 \tfrac{1}{2} bc & 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} cd \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} ad & \sin^2 \tfrac{1}{2} bd & \sin^2 \tfrac{1}{2} cd & 0 \end{vmatrix}$$

mit $16\, r^8$ multiplicirt und erwägt, dass

$$r^3 \sin abd = 6\, OABD \qquad 4\, r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab = h$$

u. s. w., so erhält man

$$(24\, r\, .\, ABCD)^2 = - \begin{vmatrix} 0 & h & g & f' \\ h & 0 & f & g' \\ g & f & 0 & h' \\ f' & g' & h' & 0 \end{vmatrix}$$

zur Berechnung des Radius der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Kanten und dem Volum*). Die rechte Seite bedeutet das 16fache Quadrat der Fläche des Dreiecks, dessen Seiten $\sqrt{ff'}$, $\sqrt{gg'}$, $\sqrt{hh'}$ sind. Vergl. §. 5, 6.

9. Der Abstand der Geraden $r_k$, welche den Punct $N$ enthält, von der Geraden $r_i$, welche den Punct $M$ enthält, wird durch den Abstand $d$ des Punctes $N$ von der Ebene $MM_i N_k$ angegeben,

*) In diese Form ist die von Jungius (Biographie von Guhrauer 1850 p. 297) und neuerlich von Carnot (Mém. sur la relation . . 12) gefundene Relation durch Joachimsthal l. c. (27) gebracht worden. Eine geometrische Ableitung derselben hat Staudt Crelle J. 57 p. 88 gegeben.

wenn $MM_i$, $MN_k$ mit $r_i$, $r_k$ parallel sind. Das 6fache Tetraeder $MM_iN_kN$ wird nun sowohl durch $d.MM_i.MN_k \sin r_ir_k$ als auch durch $MN.MM_i.MN_k \sin rr_ir_k$ ausgedrückt, wobei $r$ die Gerade bedeutet, auf der $MN$ liegt. Daher hat man (3)

$$d \sin r_ir_k = MN \sin rr_ir_k$$

$$d \sin r_ir_k \sin xyz = \begin{vmatrix} MN\cos xr & \cos xr_i & \cos xr_k \\ MN\cos yr & \cos yr_i & \cos yr_k \\ MN\cos zr & \cos zr_i & \cos zr_k \end{vmatrix}$$

Unter der Voraussetzung $\sin xyz = 1$ bezeichne man $d \sin r_ir_k$ durch $h_{ik}$, und $\cos xr_i$, $\cos yr_i$, $\cos zr_i$ durch $a_i$, $b_i$, $c_i$. Dann ist

$$h_{ik} = \begin{vmatrix} x_k - x_i & a_i & a_k \\ y_k - y_i & b_i & b_k \\ z_k - z_i & c_i & c_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_k & x_k \\ b_i & b_k & y_k \\ c_i & c_k & z_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_k & a_i & x_k \\ b_k & b_i & y_i \\ c_k & c_i & z_k \end{vmatrix}$$

$$= a_i\alpha_k + b_i\beta_k + c_i\gamma_k + \alpha_ia_k + \beta_ib_k + \gamma_ic_k$$

mithin $h_{ik} = h_{ki}$, $h_{ii} = 0$, $a_i\alpha_i + b_i\beta_i + c_i\gamma_i = 0$. Hieraus folgt nach §. 3, 7*)

$$\begin{vmatrix} h_{11} & a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ h_{17} & a_7 & b_7 & c_7 & \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 \end{vmatrix} = 0$$

und nach §. 6, 1

$$\Sigma \pm h_{11}h_{22}\ldots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & . & . & a_1 & . & . \\ \alpha_2 & . & . & a_2 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \pm h_{11}\ldots h_{77} = 0$$

$$\Sigma \pm h_{11}\ldots h_{66} = -\begin{vmatrix} a_1 & . & . & \alpha_1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_6 & . & . & \alpha_6 & . & . \end{vmatrix}^2$$

10. Wenn man 4 Gerade des Raumes durch $a$, $b$, $c$, $d$, und Ebenen, die mit den Paaren $ad$, $bd$, $cd$, $bc$, $ca$, $ab$ parallel sind, der Reihe nach durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ bezeichnet, so folgt aus den Gleichungen (4)

---

*) Brioschi Crelle J. 50 p. 286.

$$\sin ab \sin cd \cos \gamma\gamma_1 = \cos ac \cos bd - \cos bc \cos ad$$
$$\sin bc \sin ad \cos \alpha\alpha_1 = \cos ba \cos cd - \cos ca \cos bd$$
$$\sin ca \sin bd \cos \beta\beta_1 = \cos cb \cos ad - \cos ab \cos cd$$

durch Addition

$$\text{(I)} \qquad \sin ab \sin cd \cos \gamma\gamma_1 + \sin bc \sin ad \cos \alpha\alpha_1 + \sin ca \sin bd \cos \beta\beta_1 = 0$$

weil $\cos ba = \cos ab$ u. s. w. Man bestimmt willkürlich für jede Ebene die positive Normale und den positiven Sinn u. s. w. Dieselbe Gleichung gilt für 4 Ebenen $a$, $b$, $c$, $d$, indem man die Geraden $ad$, .. durch $\alpha$, .. bezeichnet*). In diesem Falle bestimmt man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden, und demgemäss durch Drehungen von einerlei Sinn die Flächenwinkel, deren Kanten die Geraden sind.

Die entsprechende Gleichung für 4 Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ ist**)

$$\text{(II)} \qquad AB\,.\,CD \cos\gamma\gamma_1 + BC\,.\,AD \cos\alpha\alpha_1 + CA\,.\,BD \cos\beta\beta_1 = 0$$

wenn durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ die Geraden bezeichnet werden, auf denen $AD$, $BD$, $CD$, $BC$, $CA$, $AB$ liegen. Man hat nämlich durch Projection

$$AB \cos\gamma\gamma_1 = AD \cos\alpha\gamma + DB \cos\beta\gamma$$
$$BC \cos\alpha\alpha_1 = BD \cos\beta\alpha + DC \cos\gamma\alpha$$
$$CA \cos\beta\beta_1 = CD \cos\gamma\beta + DA \cos\alpha\beta$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $CD$, $AD$, $BD$ multiplicirt und summirt, erhält man die angegebene Relation, weil $AD = -DA$, u. s. w.

Um den Zusammenhang der Gleichungen (I) und (II) zu erkennen, bezeichne man die Ebenen, auf welchen die Flächen des Tetraeders $ABC$, $ACD$, $CBD$, $BAD$ liegen, der Reihe nach durch $d$, $b$, $a$, $c$, und die Geraden, auf denen die Kanten $AB$, $BC$, .. liegen, durch $cd$, $ad$, ... Dann ist auch dem Zeichen nach (§. 15, 3)

$$6ABCD\,.\,CA = AB\,.\,AC\,.\,CA\,.\,AD \sin cd^\wedge bd \sin bd^\wedge bc \sin db$$
$$= 4ABC\,.\,ACD \sin bd$$

und durch Vertauschung

---

*) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 45.

**) Carnot mém. sur la relation qui existe etc. 27.

$$6\,BADC\,.\,BD = 4\,BAD\,.\,BDC \sin ca$$

Nun ist $BADC = ABCD$, $BDC = CBD$, also erhält man durch Multiplication, wenn man das Product der Flächen des Tetraeders durch $p$ bezeichnet,

$$9\,ABCD^2\,.\,CA\,.\,BD = 4\,p \sin ca \sin bd$$

und daher *)

$$\text{(III)} \quad \frac{9\,ABCD^2}{4\,p} = \frac{\sin ca \sin bd}{CA\,.\,BD} = \frac{\sin ab \sin cd}{AB\,.\,CD} = \frac{\sin bc \sin ad}{BC\,.\,AD}$$

Es kann also von den Gleichungen (I) und (II) eine aus der andern abgeleitet werden.

11. Wenn bei den obigen Voraussetzungen (1) der Nullpunct der orthogonalen Coordinaten durch $O$, die Quadrat-Distanzen $A_iB_k^2$, $OA_i^2$, $OB_k^2$ durch $d_{ik}$, $r_i$, $\varrho_k$ bezeichnet werden, so ist

$$r_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \qquad \varrho_k = \xi_k^2 + \eta_k^2 + \zeta_k^2$$
$$d_{ik} = (x_i - \xi_k)^2 + (y_i - \eta_k)^2 + (z_i - \zeta_k)^2$$
$$= r_i + \varrho_k - 2\,x_i\xi_k - 2\,y_i\eta_k - 2\,z_i\zeta_k$$

und nach §. 6, 1

$$\Sigma \pm d_{00}d_{11}\,.\,. = \begin{vmatrix} r_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 & -2\xi_0 & -2\eta_0 & -2\zeta_0 \\ 1 & \varrho_1 & -2\xi_1 & -2\eta_1 & -2\zeta_1 \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

folglich

$$\Sigma \pm d_{00}\,.\,.\,d_{55} = 0$$
$$\Sigma \pm d_{00}\,.\,.\,d_{44} = 8\,(r\,1\,x\,y\,z)(\varrho\,1\,\xi\,\eta\,\zeta)$$
$$\Sigma \pm d_{00}\,.\,.\,d_{33}$$
$$= -4\,(r\,1\,x\,y)(\varrho\,1\,\xi\,\eta) - 4\,(r\,1\,y\,z)(\varrho\,1\,\eta\,\zeta) - 4\,(r\,1\,z\,x)(\varrho\,1\,\zeta\,\xi)$$
$$-8\,(r\,x\,y\,z)(1\,\xi\,\eta\,\zeta) - 8\,(1\,x\,y\,z)(\varrho\,\xi\,\eta\,\zeta)$$

wobei

$$(r\,1\,x\,y\,z) = \begin{vmatrix} r_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

u. s. w. gesetzt ist.

Wenn man 2 Reihen jedes Systems die eine durch $r_0$, die andre durch $\varrho_0$ dividirt hat, so erhält man bei unendlich grossen $r_0$, $\varrho_0$

*) BRETSCHNEIDER Geometrie §. 677.

$$\frac{d_{0k}}{r_0} = 1 \qquad \frac{1}{r_0} = \frac{x_0}{r_0} = \frac{y_0}{r_0} = \frac{z_0}{r_0} = 0$$

$$\frac{d_{i0}}{\varrho_0} = 1 \qquad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\xi_0}{\varrho_0} = \frac{\eta_0}{\varrho_0} = \frac{\zeta_0}{\varrho_0} = 0$$

und daher die einfacheren Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & .\,. & 1 \\ 1 & d_{11} & .\,. & d_{15} \\ . & . & .\,. & . \\ 1 & d_{51} & .\,. & d_{55} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & .\,. & 1 \\ 1 & d_{11} & .\,. & d_{14} \\ . & . & .\,. & . \\ 1 & d_{41} & .\,. & d_{44} \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ . & . & . & . \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}$$

$$= 288\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 \ (3)$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & d_{13} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{31} & . & d_{33} \end{vmatrix} = -4\,(1\,x\,y)(1\,\xi\,\eta) - 4\,(1\,x\,z)(1\,\xi\,\zeta) - 4\,(1\,y\,z)(1\,\eta\,\zeta)$$

$$= -4\, A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos n\nu \ (4)$$

wobei

$$(1\,x\,y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn die Puncte des zweiten Systems der Reihe nach mit den Puncten des ersten Systems, $\xi_k$, $\eta_k$, $\zeta_k$, $\varrho_k$, mit $x_k$, $y_k$, $z_k$, $r_k$ zusammenfallen, so ist $d_{ik} = d_{ki}$ und $d_{ii} = 0$.

12. Die Gleichung (I) ist unter der Voraussetzung, dass das zweite System mit dem ersten zusammenfällt ($d_{ik} = d_{ki}$, $d_{ii} = 0$), als Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte des Raumes unter einander verbinden, von Cayley 1847 Cambr. math. J. 2 p. 268 in der obigen Gestalt und durch Mittel, welche von den oben angewandten nicht wesentlich verschieden sind, aufgestellt worden. Diese besondere Gleichung kommt in anderer Gestalt bei Lagrange sur les pyr. 19 vor, und ist wiederholt jedoch ohne übersichtliche Resultate von Carnot (Géom. de pos. 359, Mém. sur la relation qui existe etc. 58) bearbeitet worden. Vermöge derselben

Gleichung ist z. B. $d_{15}$ durch die übrigen Strecken bestimmt, und zwar zweideutig, in Uebereinstimmung mit der Construction, durch welche jene Strecke aus den übrigen gefunden wird.

Die Gleichungen (II) und (III), welche Staudt a. a. O. gegeben hat, sind in obige Gestalt durch Sylvester Philos. Mag. 1852, II p. 335 gebracht worden. Dieselben enthalten den von Jungius (Biographie von Guhrauer p. 297) und Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158 gegebenen Ausdruck des Tetraedervolums durch die Kanten, sowie den altbekannten Ausdruck der Dreiecksfläche durch die Seiten $a$, $b$, $c$

$$-16\, A_1 A_2 A_3^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Vergl. §. 3, 4 und §. 5, 6. Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

enthält die Bedingung, unter der die Puncte $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ auf einer Ebene liegen, und stimmt überein mit der Gleichung zwischen den Strecken, welche diese Puncte unter einander verbinden (Jungius und Euler Acta Petrop. 6, I p. 3).

Unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

liegen die Puncte $A_1$, $A_2$, $A_3$ auf einer Geraden. Bei jeder Lage der 3 Punkte auf einer Geraden verschwindet ein Divisor dieser Determinante (§. 5, 6).

**13.** Die aus den Elementen $d_{ik}$ gebildeten Determinanten können aus den Determinanten abgeleitet werden, deren Elemente Producte von zwei Strecken $AA_i$, $BB_k$ mit dem Cosinus des Winkels ihrer Geraden sind. Wenn man $AB^2$, $AB_k^2$, $A_iB^2$ durch $d_{00}$, $d_{0k}$, $d_{i0}$ bezeichnet, so ist (1, III)

$$-2c_{ik} = d_{ik} - d_{i0} - d_{0k} + d_{00}$$

Daher wird die Determinante *m*ten Grades

$$(-2)^m \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ 1 & d_{11} - d_{10} - d_{01} + d_{00} & d_{12} - d_{10} - d_{02} + d_{00} & . \\ 1 & d_{21} - d_{20} - d_{01} + d_{00} & d_{22} - d_{20} - d_{02} + d_{00} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

nach Verbindung der ersten Colonne mit den übrigen Colonnen

$$= \begin{vmatrix} 1 & d_{01} - d_{00} & d_{02} - d_{00} & . \\ 1 & d_{11} - d_{10} & d_{12} - d_{10} & . \\ 1 & d_{21} - d_{20} & d_{22} - d_{20} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ d_{00} & 1 & d_{01} - d_{00} & . \\ d_{10} & 1 & d_{11} - d_{10} & . \\ d_{20} & 1 & d_{21} - d_{20} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & d_{00} & d_{01} & . \\ 1 & d_{10} & d_{11} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(m+2)$ten Grades. Ebenso wird die Determinante $(m+1)$ten Grades

$$(-2)^{m-2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & c_{11} & c_{12} & . \\ 1 & c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & -2c_{11} & -2c_{12} & . \\ 1 & -2c_{21} & -2c_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & d_{11} & d_{12} & . \\ 1 & d_{21} & d_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

eine Determinante desselben Grades durch Verbindung der ersten Colonne mit den folgenden Colonnen und der ersten Zeile mit den folgenden Zeilen.

Aus den bewiesenen Sätzen folgt: das Product von zwei planen Polygon-Flächen mit dem Cosinus des Winkels $\varphi$ ihrer Ebenen, sowie das Product von zwei Polyeder-Volumen ist eine ganze Function der Quadrate der Strecken, welche die Eckpuncte der einen Figur mit denen der andern verbinden (Staudt a. a. O.).

Die planen Polygone $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots$, $B_1 B_2 B_3 B_4, \ldots$, haben die Flächen

$$A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_4 + \ldots, \quad B_1 B_2 B_3 + B_1 B_3 B_4 + \ldots$$

Daher ist $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots \times B_1 B_2 B_3 B_4 \ldots \times \cos\varphi$

$$= A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + A_1 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + \ldots$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} \end{vmatrix} - \ldots$$

Eine mehrseitige Pyramide lässt sich aus Tetraedern zusammensetzen, ein Polyeder aus Pyramiden, die einen Eckpunct des Polyeders zur gemeinschaftlichen Spitze haben und deren Basen die Flächen des Polyeders sind. Vergl. des Verf. Elem. d. Math. Stereometrie §. 8. Demnach kann das Product der Volume von zwei Polyedern als Summe von Producten aus jedesmal zwei Tetraedern, mithin als Summe von Determinanten 5ten Grades der angegebenen Art dargestellt werden.

14. Wenn die Puncte $A_1$, $A_2$, .. auf einer gegebenen Kugel um das Centrum $B$, und die Puncte $B_1$, $B_2$, .. auf einer gegebenen Kugel um das Centrum $A$ liegen, so ist

$$A_i B^2 + A B_k^2 - A B^2 = p$$

eine gegebene Grösse, und

$$d_{ik} = A_i B_k^2 = p - 2 c_{ik}$$

ein Ausdruck von 4 Gliedern, so dass man nach §. 6, 1

$$\text{(I)} \qquad \Sigma \pm d_{11} \ldots d_{55} = 0$$

findet für 2mal 5 Puncte je einer Kugel. U. s. w. Auch kann man sich der Substitution

$$-2 c_{ik} = d_{ik} - p$$

bedienen und erhält

$$(-2)^m \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} - p & d_{12} - p & . \\ d_{21} - p & d_{22} - p & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & p & . \\ 1 & d_{11} & d_{12} & . \\ 1 & d_{21} & d_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & . \\ d_{21} & d_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & d_{11} & d_{12} & . \\ 1 & d_{21} & d_{22} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{vmatrix} d_{11} & \cdot\cdot & d_{14} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ d_{41} & \cdot\cdot & d_{44} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdot\cdot & 1 \\ 1 & d_{11} & \cdot\cdot & d_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & d_{41} & \cdot\cdot & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{(III)}\quad \begin{vmatrix} d_{11} & \cdot & d_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{31} & \cdot & d_{33} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & d_{11} & \cdot & d_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & d_{31} & \cdot & d_{33} \end{vmatrix} + 8\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} = 0$$

für 2mal 4 und 2mal 3 Puncte je einer Kugel. Also ist (11)

$$\Sigma \pm d_{11} \,..\, d_{44} + 288\, p \,.\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 = 0\,^{*)}$$

und wenn bei zwei Dreiecken einer Ebene die Centren der umgeschriebenen Kreise durch $B$ und $A$ bezeichnet werden,

$$\Sigma \pm d_{11} \,.\, d_{33} = p \,.\, A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3$$

Wenn man durch $S$ einen gemeinschaftlichen Punct der beiden Kugeln oder Kreise bezeichnet, so hat man

$$p = AS^2 + BS^2 - AB^2 = 2\, AS \,.\, BS \cos w$$

wobei $w$ den Winkel der Geraden $AS$, $BS$ d. i. den Winkel der beiden Kugeln oder der beiden auf einer Ebene liegenden Kreise bedeutet. Man erkennt hieraus, dass die Determinante $\Sigma \pm d_{11} \,..\, d_{44}$, deren Elemente die Quadrate der Strecken sind, welche 4 Puncte mit 4 andern Puncten verbinden, dem Product der beiden Tetraedervolume proportional ist, und übrigens nur von der Grösse und dem Abstand der umgeschriebenen Kugeln abhängt. Sie ist null, wenn die beiden Kugeln sich rechtwinkelig schneiden, und insbesondere auch dann, wenn die 4 Puncte des einen Systems auf einem Kreise liegen.

Die Determinante $\Sigma \pm d_{11} \,..\, d_{44}$ ist die erste unter den Subdeterminanten 4ten Grades, welche zu dem System der 25 Elemente

$$\begin{matrix} 0 & 1 & \cdot\cdot & 1 \\ 1 & d_{11} & \cdot\cdot & d_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & d_{41} & \cdot\cdot & d_{44} \end{matrix}$$

---

*) Siebeck Crelle J. 62 p. 151.

gehören. Die übrigen Subdeterminanten desselben Grades können aus jener abgeleitet werden; man findet z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = -288\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B B_2 B_3 B_4$$

weil bei der Vereinigung des Punctes $B_1$ mit dem Centrum $B$

$$p = AB^2 + BA_1^2 - AB^2 = d_{11} = d_{21} = d_{31} = d_{41}$$

Beim Zusammenfallen der beiden Systeme ist $d_{ki} = d_{ik}$, $d_{ii} = 0$, $p = 2\,AA_1^2$, und man erhält ausser der Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel unter einander verbinden (Cayley Cambr. math. J. 2 p. 268), die oben (8) bewiesenen Gleichungen.

15. Wenn die sphärischen Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ auf einer Kugel liegen, deren Radius eine Längeneinheit ist, und die Puncte $A_4$, $B_4$ im Centrum $O$ dieser Kugel vereint sind, so ist

$$\Sigma \pm d_{11} \,..\, d_{44} + 288\, p \,.\, A_1A_2A_3O \,.\, B_1B_2B_3O = 0 \quad (14)$$

$$d_{44} = 0, \quad d_{14} = d_{24} = d_{34} = d_{41} = d_{42} = d_{43} = 1$$

und übrigens

$$d_{ik} = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_i B_k = 2 - 2 \cos A_i B_k$$

Nun ist

$$\Sigma \pm d_{11} \,..\, d_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & .. \\ 1 & 2 - 2\cos A_1 B_1 & .. \\ 1 & 2 - 2\cos A_2 B_1 & .. \\ 1 & 2 - 2\cos A_3 B_1 & .. \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & .. \\ 1 & \cos A_1 B_1 & .. \\ 1 & \cos A_2 B_1 & .. \\ 1 & \cos A_3 B_1 & .. \end{vmatrix}$$

und $36\, A_1A_2A_3O \,.\, B_1B_2B_3O = \sin A_1A_2A_3 \sin B_1B_2B_3$ (3)

$$= \begin{vmatrix} \cos A_1 B_1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_1 B_3 \\ \cos A_2 B_1 & \cos A_2 B_2 & \cos A_2 B_3 \\ \cos A_3 B_1 & \cos A_3 B_2 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix}$$

folglich durch Addition *)

$$\begin{vmatrix} 2p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_1 B_3 \\ 1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_2 B_2 & \cos A_2 B_3 \\ 1 & \cos A_3 B_1 & \cos A_3 B_2 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix} = 0$$

*) Siebeck a. a. O.

Um die Grösse $p$ sphärisch auszudrücken, braucht man die sphärischen Centren $P$ und $Q$ der Kreise $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$. Die Geraden $OP$, $OQ$ enthalten die Centren $B$, $A$ der Kugeln $A_1 A_2 A_3 O$, $B_1 B_3 B_3 O$ und sind Diameter, also ist $\cos PQ$ der Cosinus des von den Geraden $AO$, $BO$ gebildeten Winkels, mithin

$$p = 2AO \, . \, BO \cos PQ, \qquad 2p = OP \, . \, OQ \cos PQ$$

Nun ist $OP \cos PA_1 = OA_1 = 1$, $\quad OQ \cos QB_1 = OB_1 = 1$, folglich

$$2p = \frac{\cos PQ}{\cos PA_1 \cos QB_1}.$$

Wenn die Kreise $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ in $R$ sich schneiden, so hat man

$$\cos PQ = \cos PR \cos RQ + \sin PR \sin RQ \cos QRP$$
$$2p = 1 + \tang PR \tang RQ \cos QRP$$

Bei rechtwinkelig sich schneidenden Kreisen ist $2p = 1$.

Weitere Untersuchungen auf diesem durch Cayley und Joachimsthal eröffneten Gebiet haben Kronecker Crelle J. 72 p. 152, Bauer Münchener Acad. 1873 p. 345, Darboux Ann. de l'éc. normale 1872 p. 323, Frobenius Crelle J. 79 p. 185 gegeben.

## §. 17. Polygonometrische und polyedrometrische Relationen.

1. Wenn die Seiten $AB$, $BC$, .., $MN$, $NA$ eines beliebigen Polygons nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtungen der Geraden, auf denen sie liegen, die Werthe $a_1$, $a_2$, .., $a_n$ haben, und $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade der $i$ten Seite mit einer beliebigen Geraden bildet, so ist*)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

Sind nämlich $A_1$, $B_1$, .. die orthogonalen Projectionen von $A$, $B$, .. auf eine beliebige Gerade, so hat man

$$A_1 B_1 + B_1 C_1 + \ldots + M_1 N_1 + N_1 A_1 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass $A_1 B_1 = - B_1 A_1$, u. s. w. Nun ist allgemein $A_1 B_1 = AB \cos_{p1}$, wie auch die Richtung der posi-

*) Lexell Nov. Comm. Petrop. 19 p. 187. L'Huilier polygonométrie p. 20. Carnot géom. de pos. 254.

tiven Strecken auf den Geraden, deren Strecken $AB$ und $A_1 B_1$ sind, angenommen werde, weil bei Vertauschung einer Richtung mit der entgegengesetzten zwei der Grössen $A_1 B_1$, $AB$, $\cos_{p1}$ das Zeichen wechseln. Durch Substitution der Werthe von $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, .. findet man die angegebene Fundamentalgleichung der Polygonometrie.

Wenn umgekehrt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Strecken von gegebener Richtung und Grösse sind, und $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade, auf welcher die $i$te Strecke liegt, mit einer beliebigen Geraden bildet, und die Summe

$$S = a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn}$$

verschwindet, wie auch die willkürliche Gerade angenommen werde, so erhält man ein geschlossenes Polygon, wenn man nach willkürlicher Anordnung der Strecken, ohne deren Richtungen zu verändern, mit dem Ende der ersten den Anfang der zweiten, mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Gesetzt, das Ende der letzten Strecke fiele mit dem Anfang der ersten nicht zusammen, so würde die Summe $S$ im Allgemeinen nicht verschwinden, was der Voraussetzung widerstreitet.

2. Der Inhalt eines planen Dreiecks ist unzweideutig bestimmt, wenn nicht nur der Sinn, in welchem sein Perimeter zu durchlaufen ist, sondern auch die positive Richtung der Normalen seiner Ebene nebst dem positiven Sinn der Ebene gegeben ist. Der Beurtheiler stelle sich so auf die Ebene, dass ihm die positive Richtung der Normalen aufwärts gehend erscheint; je nachdem nun die durch die Ordnung der Eckpuncte gegebene Drehung mit der Drehung, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, einerlei Sinnes ist oder nicht, wird der Inhalt als positiv oder negativ bezeichnet. In gleicher Weise ist zur unzweideutigen Bestimmung des Inhalts jedes planen Polygons der Sinn seines Perimeters erforderlich.

Bei einer Fläche eines gegebenen Polyeders kann der Sinn ihres Perimeters willkürlich bestimmt werden. Bei jeder mit dieser Fläche durch eine gemeinschaftliche Kante $MN$ verbundenen Fläche des Polyeders wird der Sinn des Perimeters so angenommen, dass die vereinigten Theile der beiden Perimeter einander entgegengesetzt sind, also der eine durch $MN$, der andre durch

*NM* ausgedrückt wird *). Wenn z. B. eine Fläche des Tetraeders *ABCD* durch *ABC* ausgedrückt wird, so sind die übrigen Flächen durch *CBD*, *BAD*, *ACD* auszudrücken. Ist *ABCD* eine Fläche eines Hexaeders, so sind *DCC'D'*, *CBB'C'*, *BAA'B'*, *ADD'A'*, *D'C'B'A'* die übrigen Flächen. U. s. w.

Wenn nun die in der angegebenen Weise ausgedrückten Flächen eines Polyeders nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtung der Normalen und des positiven Sinnes einer jeden Ebene die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ haben, und wenn durch $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels bezeichnet wird, welchen die Ebene der *i*ten Fläche mit einer beliebig hinzugefügten Ebene bildet, so ist**)

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0$$

**Beweis.** Man bezeichne die Normalprojectionen der Eckpuncte $A$, $B$, $C$, .. auf die beliebig angenommene Ebene durch $A_1$, $B_1$, $C_1$, ... Die Summe $\Sigma$ der Projectionen der Polyederflächen besteht aus der Summe aller Dreiecke, welche einen beliebigen Punct $O$ der Projectionsebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Seiten der durch Projection der Polyederflächen entstandenen Polygone sind. Die Summe dieser Dreiecke enthält aber zu jedem Dreieck $OM_1N_1$ auch das entgegengesetzte $ON_1M_1$, folglich verschwindet sie und mit ihr die Summe $\Sigma$. Nun ist die Projection der *i*ten Fläche

$$F_1G_1H_1 \ldots = FGH \ldots \cos_{pi}$$

also verschwindet die Summe $\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots$ .

**Zusatz.** Construirt man auf den Normalen der Flächen des Polyeders je eine Strecke $a_1$, $a_2$, .., $a_n$ proportional den Werthen $\alpha_1$, $\alpha_2$, .., $\alpha_n$ der Flächen, zu denen die Normalen gehören, so ist zufolge der bewiesenen Gleichung auch

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

wo nun unter $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels verstanden werden

---

*) Dieses Princip ist von Möbius Statik §. 55 angedeutet, in den Leipziger Berichten 1865 p. 31 als »Gesetz der Kanten« aufgestellt worden. Vergl. des Verf. Elem. d. Math. Stereom. §. 8, 16.

**) L'Huilier théorèmes de polyedr. 1799 (Mém. présentés à l'Inst. 1. 1805 p. 264). Carnot l. c. Die Voraussetzungen, unter welchen die Gleichung gültig ist, werden in diesen Schriften nicht genau angegeben.

kann, den die Gerade, auf der die Strecke $a_i$ liegt, mit der Normale einer beliebigen Ebene, d. h. mit einer beliebigen Geraden bildet. Daher erhält man (1) ein geschlossenes Polygon, wenn man, ohne die Richtungen der Strecken $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu verändern, mit dem Ende der ersten Strecke den Anfang der zweiten, dann mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Es giebt also für jedes Polyeder ein zugehöriges Polygon, dessen Seiten und Winkel den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders gleich sind, so dass jede polygonometrische Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons eine polyedrometrische Gleichung zwischen den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders ist.

3. Indem man die beliebige Gerade (Ebene) der Reihe nach mit den einzelnen Geraden (Ebenen) der Polygonseiten (Polyederflächen) vereinigt, erhält man das System von homogenen linearen Gleichungen (1)

$$\begin{array}{c} a_1 \cos_{11} + a_2 \cos_{12} + \ldots + a_n \cos_{1n} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1 \cos_{n1} + a_2 \cos_{n2} + \ldots + a_n \cos_{nn} = 0 \end{array}$$

worin $\cos_{ii} = 1$, $\cos_{ki} = \cos_{ik}$ ist. Das System

$$\begin{array}{ccc} \cos_{11} & \ldots & \cos_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \cos_{n1} & \ldots & \cos_{nn} \end{array}$$

hat die Eigenthümlichkeit, dass alle seine Subdeterminanten 4ten und höhern Grades zufolge des §. 16, 2 bewiesenen Satzes null sind. Man kann also aus dem obigen System für $n = 3$ die Proportion der Seiten eines gradlinigen Dreiecks, für $n = 4$ die Proportion der Seiten eines unebenen geradlinigen Vierecks und der Flächen eines Tetraeders goniometrisch ausdrücken. Dagegen bleibt die Proportion der Seiten eines andern Polygons und der Flächen eines Polyeders unbestimmt.

Wenn die Seiten des Vierecks $OPQR$ auf den Geraden $x, y, z, r$ liegen, so hat man ausser der Gleichung

$$OP \cos px + PQ \cos py + QR \cos pz + RO \cos pr = 0$$

die 4 besondern Gleichungen, welche durch das Zusammenfallen von $p$ mit $x, y, z, r$ sich ergeben,

$$\begin{aligned}
OP\cos xx + PQ\cos xy + QR\cos xz + RO\cos xr &= 0\\
OP\cos yx + PQ\cos yy + QR\cos yz + RO\cos yr &= 0\\
OP\cos zx + PQ\cos zy + QR\cos zz + RO\cos zr &= 0\\
OP\cos rx + PQ\cos ry + QR\cos rz + RO\cos rr &= 0
\end{aligned}$$

Aus diesem System folgt nach Multiplication mit $OP$, $PQ$, $QR$, $-RO$ durch Addition die Gleichung, welche eine Seite durch die übrigen Seiten und deren Winkel bestimmt. Zufolge desselben Systems verhalten sich $OP$, $PQ$, $QR$, $RO$ zu einander, wie die Adjuncten einer Zeile des Systems der Coefficienten (§. 8, 3)

$$\begin{matrix}
\cos xx & \cos xy & \cos xz & \cos xr\\
\cos yx & \cos yy & \cos yz & \cos yr\\
\cos zx & \cos zy & \cos zz & \cos zr\\
\cos rx & \cos ry & \cos rz & \cos rr
\end{matrix}$$

Nun ist (§. 16, 3)

$$\begin{vmatrix}
\cos xy & \cos xz & \cos xr\\
\cos yy & \cos yz & \cos yr\\
\cos zy & \cos zz & \cos zr
\end{vmatrix} = \sin xyz \sin yzr$$

u. s. w. Daher folgt*)

$$OP : PQ : QR : RO = \sin yzr : \sin zxr : \sin xyr : -\sin xyz$$

und die Fundamentalgleichung der räumlichen Goniometrie

$$\sin yzr \cos px + \sin zxr \cos py + \sin xyr \cos pz = \sin xyz \cos pr$$

4. Die Distanzen einer Geraden von 3 Puncten derselben Ebene, so wie die Distanzen einer Ebene von 4 Puncten sind nicht unabhängig von einander, sondern durch eine Gleichung verbunden. Wenn von der Ebene, welche die durch den Nullpunct $O$ gehende Gerade $n$ in $N$ normal schneidet, die gegebenen Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ ($x_1$, $y_1$, $z_1$; $x_2$, $y_2$, $z_2$; ..) die Distanzen $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ haben, so findet man durch orthogonale Projection von $NA$, $NB$, .. auf $n$

$$\begin{aligned}
M_1 &= NO + x_1 \cos xn + y_1 \cos yn + z_1 \cos zn\\
&\quad\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
M_4 &= NO + x_4 \cos xn + y_4 \cos yn + z_4 \cos zn
\end{aligned}$$

*) Andere Ausdrücke dieser Proportion enthält der Aufsatz des Verf. Crelle J. 46 p. 150. Der gleichlautende tetraedrometrische Satz von den Flächen eines Tetraeders ist bekannt. Vergl. oben §. 16, 6.

4 lineare Gleichungen für $NO$, $\cos xn$, $\cos yn$, $\cos zn$. Nun sind $\cos xn$, $\cos yn$, $\cos zn$ durch eine Gleichung verbunden (§. 16, 2), folglich auch $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$. In der Auflösung (§. 8, 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \cos xn = \begin{vmatrix} 1 & M_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & M_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

hat $\cos xn$ den Coefficienten $6ABCD : \sin xyz$ (§. 15, 6). Das Element $M_1$ hat die Adjuncte

$$-\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = -\frac{2B'C'D'}{\sin yz}$$

wenn $B'C'D'$ die Projection von $BCD$ auf $yz$ durch Parallelen der $x$ ist. Bezeichnet man durch $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ die Höhen des Tetraeders, so ist (§. 15, 4)

$$B'C'D' \cos xx' = BCD \cos xh_1$$

$$\sin yz \cos xx' = \sin xyz \qquad\qquad 2BCD \,.\, h_1 = 6ABCD$$

daher die gesuchte Adjuncte

$$-\frac{6ABCD}{\sin xyz} \; \frac{\cos xh_1}{h_1}$$

u. s. w. Die für $\cos xn$ sich ergebende Gleichung

$$\cos xn + \frac{M_1}{h_1}\cos xh_1 + \frac{M_2}{h_2}\cos xh_2 + \frac{M_3}{h_3}\cos xh_3 + \frac{M_4}{h_4}\cos xh_4 = 0$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für $\cos yn$, $\cos zn$ giebt zu erkennen, dass die Strecken 1 der Richtung $n$, $M_1 : h_1$ der Richtung $h_1$, $M_2 : h_2$ der Richtung $h_2$, u. s. w. mit den Seiten eines Fünfecks parallel und gleich sind (1). Die 2 analogen planimetrischen Gleichungen zeigen an, dass die Strecken $-1$ der Richtung $n$, $M_1 : h_1$ der Richtung $h_1$, u. s. w. mit den Seiten eines Vierecks parallel und gleich sind. Demnach ist (3)

$$\left(\frac{M_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{h_2}\right)^2 + \ldots + 2\frac{M_1}{h_1}\frac{M_2}{h_2}\cos_{12} + \ldots = 1$$

die gesuchte Gleichung*).

---

*) Die planimetrische Gleichung ist von SALMON plane curves 1852 p. 10, die stereometrische von KRONECKER Crelle J. 72 p. 161 auf andern Wegen entwickelt worden.

5. Die Beziehung zwischen 4 Puncten eines Kreises $A$, $B$, $C$, $D$ kann durch die Eigenschaften der Winkel, Strecken, Flächen, welche durch die betrachteten Puncte bestimmt sind, angegeben werden. Nach dem in EUCLIDES' Elementen enthaltenen Theorem ist die Winkeldifferenz $ACB - ADB$ entweder 0 oder $180^0$, mithin allgemein *)

$$\text{(I)} \qquad 2(ACB - ADB) = 0$$

wenn die genannten Puncte auf einem Kreise liegen und Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden. Der Winkel $360^0$ ist gleichbedeutend mit 0.

Nach dem Theorem des PTOLEMÄUS (Almagest I, 9) ist ferner

$$\text{(II)} \qquad \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0$$

wenn die Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Strecken, welche 4 Kreispuncte $A$, $B$, $C$, $D$ verbinden, durch $p$, $q$, $r$ bezeichnet werden. Indem man die Norm des irrationalen Trinomium = 0 setzt, findet man die rationale Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche durch die genannten Puncte bestimmt sind. Eine der letztern analoge Gleichung giebt es für die Quadrate der Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel verbinden.

Endlich kennt man Relationen zwischen 4 Puncten eines Kreises oder 5 Puncten einer Kugel und einem beliebigen andern Puncte, wovon die letztere in einem Theorem FEUERBACH's (Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 15) enthalten ist, welches CAYLEY (Cambr. math. J. II p. 268) und LUCHTERHANDT (Crelle J. 23 p. 375) reproducirt haben. Dieselben Relationen hat MÖBIUS (Crelle J. 26 p. 26) aus barycentrischen Principien abgeleitet. CAYLEY's Verfahren, das auf dem Gebrauch der Determinanten beruht, ist folgendes.

Die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ eines Kreises seien in Bezug auf ein System orthogonaler Axen, dessen Anfang $O$ ist, durch die Coordinaten $x, y$; $x_1, y_1$; $x_2, y_2$; $x_3, y_3$ gegeben. Man hat, wie bekannt,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a + bx + cy \\ x_1^2 + y_1^2 &= a + bx_1 + cy_1 \\ &\cdots\cdots \\ x_3^2 + y_3^2 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}$$

*) MÖBIUS Kreisverwandtschaft §. 14.

folglich (§. 8, 2)

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3^2 + y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Die Entwickelung dieser Determinante nach den Elementen der ersten Colonne mit Rücksicht auf §. 15, 5 giebt:

$$OA^2 . BCD - OB^2 . CDA + OC^2 . DAB - OD^2 . ABC = 0$$

Wenn man $OP$ normal zur Kreisebene construirt und die Identität (§. 15, 5)

$$OP^2(BCD - CDA + DAB - ABC) = 0$$

zu der vorigen Gleichung addirt, so kommt

$$\text{(IV)} \qquad PA^2 . BCD - PB^2 . CDA + PC^2 . DAB - PD^2 . ABC = 0$$

worin $P$ irgend einen Punct des Raumes bedeutet. Insbesondere ist, wenn $P$ mit $D$ zusammenfällt,

$$DA^2 . BCD + DB^2 . CAD + DC^2 . ABD = 0$$

In gleicher Weise seien die Puncte $A, B, C, D, E$ einer Kugel in Bezug auf ein System orthogonaler Axen durch die Coordinaten $x, y, z$; u. s. w. gegeben. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a + bx + cy + dz \\ &\cdots \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 &= a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{aligned}$$

folgt

$$\text{(V)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 1 & x & y & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

Die Entwickelung dieser Determinante giebt (§. 15, 6)

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} OA^2 . BCDE + OB^2 . CDEA + OC^2 . DEAB \\ + OD^2 . EABC + OE^2 . ABCD = 0 \end{aligned}$$

worin $O$ irgend einen Punct des Raumes bezeichnet. Nach den in §. 15, 7 angenommenen Bezeichnungen hat man

$$\mu . OE^2 + \mu_1 . OA^2 + \mu_2 . OB^2 + \mu_3 . OC^2 + \mu_4 . OD^2 = 0$$

d. h. wenn $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ die coordinirten Coefficienten von $E$ in Bezug auf die Pyramide $ABCD$ sind, so ist für alle Puncte $O$ auf

einer um das Centrum $E$ beschriebenen Kugel $\mu_1 . OA^2 + \mu_2 . OB^2 + \mu_3 . OC^2 + \mu_4 . OD^2$ constant (Feuerbach). Insbesondere ist

$$AB^2 . CDEA + AC^2 . DEAB + AD^2 . EABC + AE^2 . ABCD = 0$$
$$\mu . DE^2 + \mu_1 . DA^2 + \mu_2 . DB^2 + \mu_3 . DC^2 = 0$$

Wenn man die Determinanten (III) und (V) bezüglich mit

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 & -2x & -2y \\ . & . & . & . \\ 1 & x_3^2 + y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 + z^2 & -2x & -2y & -2z \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 \end{vmatrix}$$

multiplicirt, so findet man $\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{33}$ und $\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{44}$ (§. 6, 3), wobei im ersten Falle

$$d_{00} = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0$$
$$d_{01} = x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = AB^2$$
$$d_{02} = x^2 + y^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2xx_2 - 2yy_2 = AC^2$$

u. s.w., im zweiten Falle

$$d_{00} = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 0$$
$$d_{01} = x^2 + y^2 + z^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 = AB^2$$

u. s. w. Daher ist die oben erwähnte Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Puncte eines Kreises verbinden, folgende (Cayley):

$$\text{(VII)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

worin $d_{ik}$ das Quadrat der Strecke vom $i$ten bis zum $k$ten Puncte bedeutet.

Die analoge Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel verbinden, lautet (Cayley):

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vergl. oben §. 16, 12 und 14.

6. Die gefundenen Relationen (III) bis (VIII) gelten für Puncte einer Linie oder Fläche 2ter Ordnung mit endlichen Hauptaxen, wenn man jede Strecke nach dem parallelen halben Diameter misst*).

**Beweis.** Man bezeichne durch $O$ den Anfang der mit den Hauptaxen parallelen Coordinaten, durch $x_1-x$, $y_1-y$, $z_1-z$ und $t$, $u$, $v$ die Normalprojectionen der Strecke $AB$ und des mit $AB$ parallel gezogenen halben Diameter $MN$ der Fläche auf die Hauptaxen derselben. Dann ist wegen der Aehnlichkeit der Figuren

$$x_1 - x : y_1 - y : z_1 - z : AB = t : u : v : MN$$

Nun sind $t$, $u$, $v$ durch die Gleichung

$$at^2 + bu^2 + cv^2 = 1$$

verbunden, folglich

$$a(x_1 - x)^2 + b(y_1 - y)^2 + c(z_1 - z)^2 = \frac{AB^2}{MN^2}$$

Wenn nun der Punct $x$, $y$, $z$ auf der Fläche 2ter Ordnung liegt so hat man

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = a' + b'x + c'y + d'z$$

u. s. w., wie oben, während an die Stelle von $OA$, $OB$, $AB$, .. deren Verhältnisse zu den halben Diametern der Fläche treten, die mit den Strecken parallel sind.

7. Ein Kegelschnitt zweiten Grades ist durch einen seiner Brennpuncte $O$ und 3 andere Puncte $A$, $B$, $C$ bestimmt; daher müssen 4 Puncte eines Kegelschnitts und ein Brennpunct desselben eine gewisse Relation haben. Die Rotationsfläche zweiten Grades, welche durch Rotation eines Kegelschnitts um seine Hauptaxe entsteht, ist durch einen ihrer Brennpuncte $O$ und 4 andere Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ bestimmt, so dass eine Relation zwischen 5 Puncten einer solchen Fläche und einem ihrer Brennpuncte bestehen muss. Diese Relationen sind von Möbius (Crelle J. 26 p. 29) angegeben und bewiesen worden.

---

*) Die Geltung der obigen Sätze für Ellipse und Ellipsoid hat Brioschi Crelle J. 50 p. 236 bemerkt.

Man kann dieselben aus dem bekannten Satze ableiten, dass der Radius Vector $OA = r$ eines Kegelschnitts oder einer Rotationsfläche der angegebenen Art eine lineare Function der Coordinaten $x$, $y$ oder $x$, $y$, $z$ des Punctes $A$ in Bezug auf beliebige Axen ist. Sind $x_1$, $y_1$ oder $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Coordinaten von $B$ u. s. w., so hat man

$$\begin{array}{ll} r = a + bx + cy & r = a + bx + cy + dz \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ r_3 = a + bx_3 + cy_3 & r_4 = a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{array}$$

folglich (§. 8, 2)

$$\begin{vmatrix} r & 1 & x & y \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ r_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ r_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} r & 1 & x & y & z \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

d. h. (§. 15, 5. 6)

$$OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0$$

$$OA.BCDE + OB.CDEA + OC.DEAB$$
$$+ OD.EABC + OE.ABCD = 0$$

Wenn $A$, $B$, $C$, $D$ auf der Rotationsfläche und zugleich auf einer durch $O$ gehenden Ebene liegen, so ist $ABCD = 0$ und

$$BCDE : - CDAE : DABE : - ABCE$$
$$= BCD : - CDA : DAB : - ABC$$

folglich

$$OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0$$

d. h. die Rotationsfläche wird von einer durch einen ihrer Brennpuncte gelegten Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten, für welche jener Punct ein Brennpunct ist (Möbius a. a. O.).

8. Die einfachste Relation zwischen 5 Puncten des Raumes, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, deren Coordinaten in Bezug auf 3 beliebige Axen $x_1$, $y_1$, $z_1$; $x_2$, $y_2$, $z_2$ u. s. w. sind, findet man, indem man die Identität (§. 2, 3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Elementen der ersten Colonne entwickelt und die gefundenen Determinanten 4ten Grades nach §. 15, 6 deutet,

$$\text{(I)} \qquad BCDE + CDEA + DEAB + EABC + ABCD = 0$$

vergl. §. 15, 7. Wenn man die Volume der einzelnen Tetraeder durch ihre Kanten ausdrückt (§. 16, 12), so erhält man eine irrationale Gleichung, deren rechte Seite Null ist und deren linke Seite die Summe der Quadratwurzeln von 5 Determinanten 5ten Grades ist. Um diese Gleichung zu rationalisiren, hat man die Norm der linken Seite gleich Null zu setzen, d. h. das Product aus den 16 Werthen, welche die linke Seite vermöge der Zweideutigkeit von 4 unter jenen Quadratwurzeln annehmen kann*). Die Norm der linken Seite besitzt aber einen rationalen Divisor, zu dessen Auffindung es genügt, die Gleichung (I) mit einem ihrer Glieder zu multipliciren, weil das Product aus zwei Tetraedern eine rationale Function von den Quadraten der Strecken ist, welche die Eckpuncte des einen Tetraeders mit denen des andern Tetraeders verbinden (§. 16, 12).

Dieser Divisor der rationalisirten Gleichung ist die in §. 16, 12 nach Cayley a. a. O. gegebene Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

für die Quadrate der Strecken, welche 5 Puncte des Raumes verbinden.

Diese Determinante nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt giebt

$$\delta_{01} + \delta_{02} + \delta_{03} + \delta_{04} + \delta_{05} = 0$$

wenn man durch $\delta_{ik}$ die Adjuncte des Elements $d_{ik}$ bezeichnet. Nun ist $\delta_{ki} = \delta_{ik}$, $\delta_{ik}^2 = \delta_{ii}\,\delta_{kk}$ (§. 3, 5 und 8), folglich bei einer bestimmten Auswahl der Zeichen

*) Vergl. Sylvester Cambr. and Dubl. math. J. 1853 Mai.

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} + \sqrt{\delta_{55}} = 0$$

womit nach §. 16, 12 die Gleichung (I) übereinstimmt.

Analoge Bemerkungen sind über die Relationen zwischen 4 Puncten einer Ebene, 3 Puncten einer Geraden zu machen. Es ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder bei gehöriger Zeichenbestimmung

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} = 0$$

übereinstimmend mit $BCD - CDA + DAB - ABC = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

und die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} = 0$$

übereinstimmend mit $AB + BC + CA = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus 5, VII und VIII. Wenn nämlich von 5 Puncten einer Kugel einer unendlich fern ist, so ist z. B.

$$\frac{d_{01}}{d_{01}} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{d_{03}}{d_{01}} = \frac{d_{04}}{d_{01}} = 1$$

und die übrigen 4 Puncte liegen auf einer Ebene. Und wenn von

4 Puncten eines Kreises einer unendlich fern ist, so liegen die übrigen 3 Puncte auf einer Geraden.

9. Wenn der Kreis $K$ den Radius $r$ und sein Centrum die rechtwinkeligen Coordinaten $a$, $b$ hat, wenn der Kreis $K_i$ den Radius $r_i$ und das Centrum $a_i$, $b_i$ hat, wenn man

$$s_i = (a - a_i)^2 + (b - b_i)^2 - (r - r_i)^2$$

d. i. die Potenz des Punctes $a$, $b$ in Bezug auf den um das Centrum $a_i$, $b_i$ mit dem Radius $r - r_i$ beschriebenen Kreis, und analog

$$s_{ik} = (a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2 - (r_i - r_k)^2 = [a - a_k - (a - a_i)]^2 + \cdots$$
$$= s_i + s_k - 2(a - a_i)(a - a_k) - 2(b - b_i)(b - b_k) + 2(r - r_i)(r - r_k) = s_{ki}$$

setzt: so werden die Kreise $K_1$, $K_2$, $K_3$ von dem Kreis $K$ berührt unter den Bedingungen $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, deren Differenzen 2 lineare Gleichungen für $a$, $b$, $r$ geben. Dazu ist*)

$$\begin{vmatrix} a - a_1 & b - b_1 & r - r_1 \\ a - a_2 & b - b_2 & r - r_2 \\ a - a_3 & b - b_3 & r - r_3 \end{vmatrix} = S$$

eine gegebene Function von $a$, $b$, $r$, weil (§. 6, 3)

$$S^2 = \begin{vmatrix} a - a_1 & b - b_1 & r - r_1 \\ a - a_2 & b - b_2 & r - r_2 \\ a - a_3 & b - b_3 & r - r_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -(a - a_1) & -(b - b_1) & r - r_1 \\ -(a - a_2) & -(b - b_2) & r - r_2 \\ -(a - a_3) & -(b - b_3) & r - r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}s_{12} & \frac{1}{2}s_{13} \\ \frac{1}{2}s_{21} & 0 & \frac{1}{2}s_{23} \\ \frac{1}{2}s_{31} & \frac{1}{2}s_{32} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}s_{12}s_{13}s_{23}$$

von gegebener Grösse ist. Die Gleichung für $r$ allein wird gefunden, indem man

$$= S \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a - a_1 & b - b_1 & r - r_1 \\ 0 & a - a_2 & b - b_2 & r - r_2 \\ 0 & a - a_3 & b - b_3 & r - r_3 \end{vmatrix}$$

mit der doppelten Fläche des Dreiecks der gegebenen Centren

---

*) MERTENS briefl. Mittheilung 1872 April. Crelle J. 77 p. 102.

$$T = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a_1 - a & b_1 - b & r - r_1 \\ 1 & a_2 - a & b_2 - b & r - r_2 \\ 1 & a_3 - a & b_3 - b & r - r_3 \end{vmatrix}$$

multiplicirt, nämlich

$$ST = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -r + r_1 & 0 & \frac{1}{2}s_{12} & \frac{1}{2}s_{13} \\ -r + r_2 & \frac{1}{2}s_{12} & 0 & \frac{1}{2}s_{23} \\ -r + r_3 & \frac{1}{2}s_{13} & \frac{1}{2}s_{23} & 0 \end{vmatrix} = -Mr + N$$

Jeder Combination der Zeichen von $r_1$, $r_2$, $r_3$ (und der entgegengesetzten Zeichen) entsprechen 2 entgegengesetzt gleiche Werthe von $S$, mithin 2 verschiedene Werthe von $r$. Für mehr Dimensionen wird die entsprechende Aufgabe durch dasselbe Verfahren gelöst.

10. Lagrange (sur les pyr. 17) hat das grösste Tetraeder untersucht, dessen Flächen gegebene Inhalte besitzen. Nach der in §. 16, 6 angenommenen Bezeichnung hat man

$$V^4 = (6AA_1A_2A_3)^4 = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$$

und nach einer von Lagrange sur les pyr. 12 aufgestellten tetraedrometrischen Gleichung (s. des Verf. Elem. d. Math., Trigonometrie §. 6, 5)

$$4A_1A_2A_3^2 = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} + 2\gamma_{23} + 2\gamma_{31} + 2\gamma_{12}$$

Also sind $\gamma_{11}$, $\gamma_{22}$, $\gamma_{33}$ und $s = \gamma_{23} + \gamma_{31} + \gamma_{12}$ gegebene Grössen und $V^4 = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$ eine Function von 3 durch eine Gleichung verbundenen Variablen, die ein Maximum werden kann unter den Bedingungen

$$\frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{23}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \gamma_{23}} = 0, \quad \frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{31}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \gamma_{31}} = 0, \quad \frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{12}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \gamma_{12}} = 0$$

Nun ist $\frac{\partial s}{\partial \gamma_{23}} = 1$ und $\frac{1}{2}\frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{23}}$ hat als Adjuncte von $\gamma_{23}$ in $\Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$ den Werth $V^4 c_{23}$ (§. 7, 2), u. s. w. Daher ist ein grösstes Tetraeder so beschaffen, dass

$$c_{23} = c_{31} = c_{12}$$

d. h. es gehört zu den besondern Tetraedern, deren gegenüberliegende Kanten normal zu einander sind und deren Höhen sich

in einem Puncte schneiden*). Denn durch Projection von $A A_2 A_3$ auf $A A_1$ findet man

$$A A_2 \cos r_1 r_2 + A_2 A_3 \cos r_1 \varrho_1 + A_3 A \cos r_1 r_3 = 0$$

indem man durch $r_1$, $r_2$, $r_3$, $\varrho_1$ die Geraden bezeichnet, auf denen $A A_1$, $A A_2$, $A A_3$, $A_2 A_3$ liegen. Nun ist

$$AA_1 . AA_2 \cos r_1 r_2 = AA_1 . AA_3 \cos r_1 r_3, \quad AA_2 \cos r_1 r_2 + A_3 A \cos r_1 r_3 = 0$$

folglich $A_2 A_3 \cos r_1 \varrho_1 = 0$.

Zur Berechnung der Elemente des gesuchten Tetraeders dient eine Gleichung 4ten Grades, von der eine positive Wurzel ohne Weiteres erkennbar ist. Es war aber von LAGRANGE nicht gezeigt worden, dass durch diese Wurzel und nur durch diese ein reales Tetraeder von grösstem Volum bestimmt wird. Diese Discussion ist von BORCHARDT auf Grund einer neuen und umfassenden Behandlung des ganzen Problems in 2 Abhandlungen (Berl. Acad. 1865 und 1866 gegeben worden**). Den folgenden Auszug seiner Arbeit hat Herr BORCHARDT 1870 zur Mittheilung an dieser Stelle zu verfassen die Güte gehabt.

I. Wo es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, sollen im Folgenden $a$, $b$ Zahlen bedeuten, welche die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 durchlaufen, $i$, $k$ Zahlen, welche die Werthe 1, 2, 3, 4 durchlaufen, $p$, $q$ Zahlen, welche die Werthe 2, 3, 4 durchlaufen. Wenn diese Buchstaben unter Summenzeichen stehen, so ist nach jedem Summationsbuchstaben besonders zu summiren.

Die Quadrate der Kanten eines Tetraeders bezeichne ich mit $(ik) = (ki)$, setze $(ii) = 0$, $(i0) = (0i) = 1$, $(00) = 0$, und nenne $R$ die Determinante 5ter Ordnung der so bestimmten Elemente $(ab)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) & (14) \\ 1 & (21) & 0 & (23) & (24) \\ 1 & (31) & (32) & 0 & (34) \\ 1 & (41) & (42) & (43) & 0 \end{vmatrix}$$

Die 25 Unterdeterminanten erster Ordnung von $R$ bezeichne ich

*) Diese Bemerkung ist von L'HUILIER de relatione mutua capacitatis etc. p. 151 gemacht worden. Vergl. des Verf. Elem. d. Math., Stereometrie §. 6, 10.

**) Vergl. LEBESGUE C. R. t. 66 p. 248, KRONECKER und BORCHARDT Berliner Monatsbericht 1872 Juni.

mit $\varrho_{ab} = \frac{\partial R}{\partial(ab)}$. Dann werden das 6fache Volumen $V$ des Tetraeders und die doppelten Inhalte $V_1, V_2, V_3, V_4$ seiner Seitenflächen durch die Gleichungen bestimmt (s. oben §. 16, 13)

$$8V^2 = R, \qquad -4V_i^2 = \varrho_{ii} = \frac{\partial R}{\partial(ii)}.$$

Damit das Tetraeder real sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass die 6 Grössen $(ik)$ positiv, die 4 Grössen $\varrho_{ii} = \frac{\partial R}{\partial(ii)}$ negativ und $R$ positiv sei, Bedingungen, welche sich in die eine zusammenfassen lassen, dass die ternäre quadratische Form

$$f = \sum_{ik}(ik)\, y_i y_k \qquad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0),$$

welche nach Elimination von $y_1$ und unter Einführung der Grössen

$$s_{pq} = (pq) - (p1) - (1q) + (11)$$

die Gestalt annimmt:

$$f = \sum_{pq} s_{pq}\, y_p y_q$$

eine definite negative Form sei, d. h. eine solche, welche für alle Werthe von $y_2, y_3, y_4$, das System $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ ausgenommen, nur negativer Werthe, mit Ausschluss der Null, fähig ist.

II. Um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, schicke ich einen allgemeinen Satz über quadratische Formen voraus, der später gebraucht wird.

Gesetzt die beiden quadratischen Formen

$$f = \sum_{pq} s_{pq}\, y_p y_q, \qquad f' = \sum_{p'} \mu_{p'}\, Y_{p'}^2$$

seien durch die Substitution

$$Y_{p'} = \sum_p g_p^{p'}\, y_p$$

in einander transformirbar, dann gehen gleichzeitig unter Einführung zweier neuen Systeme von je sechs Variablen $y_{pq} = y_{qp}$ und $Y_{pq} = Y_{qp}$ die beiden Formen

$$F = \sum_{pqp'q'} s_{pq'} s_{p'q}\, y_{pq} y_{p'q'} = \sum_{pqp'q'} s_{pp'} s_{qq'}\, y_{pq} y_{p'q'}, \quad F' = \sum_{p'q'} \mu_{p'} \mu_{q'}\, Y_{p'q'}^2$$

durch die Substitution

$$Y_{p'q'} = \sum_{pq} g_p^{p'} g_q^{q'} y_{pq}$$

in einander über. Die Transformation von $f'$ in $f$ liefert nämlich die identischen Gleichungen

$$s_{pq} = \sum_{p'} \mu_{p'} g_p^{p'} g_q^{p'}$$

und vermittelst dieser Werthe der $s_{pq}$ geht zugleich $F'$ in $F$ über.

Aus diesem Satz, der nicht nur für drei Variable $y_2$, $y_3$, $y_4$, sondern für jede Anzahl von Variablen gilt, geht hervor, dass wenn $f$ eine definite Form ist, d. h. wenn die Coefficienten $\mu_{p'}$ alle dasselbe Zeichen haben, auch $F$ eine definite Form sein muss, und zwar diese letztere eine positive.

III. Das Lagrange'sche Maximum-Problem besteht darin, dass $R$ zu einem Maximum zu machen ist, während die 4 Grössen $-\varrho_{ii} = -\frac{\partial R}{\partial (ii)}$ vier gegebenen positiven Constanten $c_i$ gleich werden sollen, welche, wenn $c_4$ die grösste derselben ist, die Ungleichheit

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3} > \sqrt{c_4}$$

erfüllen. — Um das Problem in Gleichung zu setzen, empfiehlt es sich, als Variable, nach welchen differentiirt wird, nicht die ursprünglichen Grössen $(ik)$ sondern die Grössen $\varrho_{ik}$ des adjungirten Systems zu wählen, zwischen welchen die Gleichungen

$$\varrho_{i1} + \varrho_{i2} + \varrho_{i3} + \varrho_{i4} = 0$$

bestehen (§. 3, 2). Indem ich aus den 25 Grössen $\varrho_{ab}$ die Determinante

$$P = \Sigma \pm \varrho_{00} \varrho_{11} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \varrho_{44}$$

und von derselben die Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen bilde, ergiebt sich

$$P = R^4, \quad \frac{\partial P}{\partial \varrho_{00}} = R^3(00) = 0, \quad P' = \frac{\partial^2 P}{\partial \varrho_{00} \partial \varrho_{11}} = R^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -R^2$$

und mit Benutzung der oben definirten Grössen $s_{pq}$

$$\frac{\partial P'}{\partial \varrho_{pq}} = \frac{\partial^3 P}{\partial \varrho_{00} \partial \varrho_{11} \partial \varrho_{pq}} = R \Sigma \pm (00)(11)(pq) = -R s_{pq}$$

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial \varrho_{pq} \partial \varrho_{p'q'}} = \frac{\partial^4 P}{\partial \varrho_{00} \partial \varrho_{11} \partial \varrho_{pq} \partial \varrho_{p'q'}} = \Sigma \pm (00)(11)(pq)(p'q') = -(s_{pq} s_{p'q'} - s_{pq'} s_{p'q})$$

Hieraus ergeben sich die vollständigen Differentiale

$$-dP' = d(R^2) = 2RdR = R\Sigma s_{pq}\,d\varrho_{pq}$$

$$-d^2P' = d^2(R^2) = 2Rd^2R + 2dR^2 = \Sigma(s_{pq}s_{p'q'} - s_{pq'}s_{p'q})\,d\varrho_{pq}\,d\varrho_{p'q'}$$

oder

$$(1) \qquad 2dR = \Sigma s_{pq}\,d\varrho_{pq}$$

$$(2) \qquad 2(Rd^2R - dR^2) = -\Sigma s_{pq'}s_{p'q}\,d\varrho_{pq}\,d\varrho_{p'q'}$$

In den Summationen rechter Hand erhält jede der Zahlen $p$, $q$, $p'$, $q'$ die Werthe 2, 3, 4. Man kann aber auch noch den Werth 1 hinzufügen, da $s_{ik} = 0$ ist für $i = 1$ oder $k = 1$. Wenn man in den so erweiterten Summen für $s_{ik}$, $s_{ik'}$, $s_{i'k}$ ihre durch die Grössen $(ik)$ ausgedrückten Werthe einsetzt und die Relationen $\varrho_{i1} + \varrho_{i2} + \varrho_{i3} + \varrho_{i4} = 0$ benutzt, ergeben sich die symmetrischen Ausdrücke

$$(3) \qquad 2dR = \Sigma(ik)\,d\varrho_{ik}$$

$$(4) \qquad 2(Rd^2R - dR^2) = -\Sigma(ik')(i'k)\,d\varrho_{ik}\,d\varrho_{i'k'}$$

IV. Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die Differentialgleichungen des vorliegenden Problems, indem man die Differentiale von $R$ und von den vier Grössen $c_1 = -\varrho_{11} = \varrho_{12} + \varrho_{13} + \varrho_{14}$, etc. gleich Null setzt. So erhält man $0 = 2dR$

$$= 2(12)d\varrho_{12} + 2(13)d\varrho_{13} + 2(14)d\varrho_{14} + 2(23)d\varrho_{23} + 2(24)d\varrho_{24} + 2(34)d\varrho_{34}$$

$$0 = d\varrho_{12} + d\varrho_{13} + d\varrho_{14}$$
$$0 = d\varrho_{21} + d\varrho_{23} + d\varrho_{24}$$
$$0 = d\varrho_{31} + d\varrho_{32} + d\varrho_{34}$$
$$0 = d\varrho_{41} + d\varrho_{42} + d\varrho_{43}$$

Diese Gleichungen mit 1, $-v_1$, $-v_2$, $-v_3$, $-v_4$ multiplicirt und addirt geben eine Summe, in welcher der Coefficient jedes einzelnen Differentials verschwinden muss, daher für $i$ von $k$ verschieden

$$(5) \qquad (ik) = \tfrac{1}{2}(v_i + v_k)$$

Hierzu kommen zwei Bedingungen. Erstens muss

$$f = \sum_{pq} s_{pq}y_p y_q = \sum_{ik}(ik)\,y_i y_k$$

oder mit Benutzung von (5)

$$= -\Sigma v_i y_i^2 \qquad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0)$$

eine definite negative Form sein. Zweitens muss $d^2R$ negativ

sein. Da aber für das Maximum bereits $dR = 0$ ist und nach Art. I in die erste Bedingung die Ungleichheit $R > 0$ eingeschlossen ist, so wird die zweite Bedingung erfüllt sein, sobald die rechte Seite von Gl. (2) negativ ist. Die rechte Seite von Gl. (2) geht aber für $d\varrho_{pq} = y_{pq}$ in die quadratische Form $-F$ des Art. II über, welche gleichzeitig mit $f$ eine definite negative Form ist. Die zweite Bedingung ist also durch die erste von selbst erfüllt.

V. Nach Einsetzung der Werthe (5) in die Determinante $R$ erhält dieselbe den Ausdruck

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (11)-v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (22)-v_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (33)-v_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & (44)-v_4 \end{vmatrix}$$

wo $(11) = (22) = (33) = (44) = 0$. Hieraus folgen für $R$ und die vier Unterdeterminanten $\varrho_{ii} = -c_i$ die Werthe

$$R = PQ \qquad c_i = -\varrho_{ii} = -\frac{\partial R}{\partial_{(ii)}} = \frac{P}{v_i}\left(Q - \frac{1}{v_i}\right)$$

wo

$$P = v_1 v_2 v_3 v_4 \qquad Q = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}$$

Um die vier zwischen den gegebenen Grössen $c_i$ und den unbekannten $v_i$ bestehenden Gleichungen nach den $v_i$ aufzulösen, setze ich

| für $P$ positiv | für $P$ negativ |
|---|---|
| $w_i = \frac{\sqrt{P}}{v_i}$ | $\omega_i = \frac{\sqrt{-P}}{v_i}$ |
| $w = \sqrt{P}.Q = \Sigma w_i$ | $\omega = \sqrt{-P}.Q = \Sigma \omega_i$ |
| $z = \frac{1}{4}w^2 = \frac{1}{4}PQ^2$ | $\zeta = \frac{1}{4}\omega^2 = -\frac{1}{4}PQ^2 = -z$ |

Hierdurch gehen die Gleichungen zwischen den $v_i$ und $c_i$ über in

$$w_i(w - w_i) = c_i \qquad \omega_i(\omega - \omega_i) = -c_i$$

oder | oder

$$(w_i - \tfrac{1}{2}w)^2 = z - c_i \qquad (\omega_i - \tfrac{1}{2}\omega)^2 = \zeta + c_i$$

Bedeuten $e$, $e_i$ und $\varepsilon$, $\varepsilon_i$ Grössen, welche der positiven oder negativen Einheit gleich sind, so lassen sich die Grössen $w$, $w_i$ und $\omega$, $\omega_i$ so darstellen

$$\tfrac{1}{2}w = e\sqrt{z} \qquad\qquad \tfrac{1}{2}\omega = \varepsilon\sqrt{\zeta}$$

$$w_i = e\sqrt{z} - ee_i\sqrt{z-c_i} \qquad\qquad \omega_i = \varepsilon\sqrt{\zeta} - \varepsilon\varepsilon_i\sqrt{\zeta+c_i}$$

und hieraus geht vermöge der Gleichungen $w = \Sigma w_i$, $\omega = \Sigma\omega_i$ für $z$ oder $\zeta = -z$ die Endgleichung in irrationaler Form hervor:

$$(6) \qquad 2\sqrt{z} - e_1\sqrt{z-c_1} - \ldots\ldots - e_4\sqrt{z-c_4} = 0$$

$$2\sqrt{\zeta} - \varepsilon_1\sqrt{\zeta+c_1} - \ldots\ldots - \varepsilon_4\sqrt{\zeta+c_4} = 0$$

Hat man hieraus $z$ oder $\zeta$ bestimmt, so setze man

$$W = (\sqrt{z} - e_1\sqrt{z-c_1})\ldots\ldots(\sqrt{z} - e_4\sqrt{z-c_4})$$

$$\Omega = (\sqrt{\zeta+c_1} - \varepsilon_1\sqrt{\zeta})\ldots\ldots(\sqrt{\zeta+c_4} - \varepsilon_4\sqrt{\zeta})$$

wo $\Omega$ für jeden positiven Werth von $\zeta$ positiv ist und $W$ für diejenigen positiven Werthe von $z$, welche grösser als die grösste der Constanten $c_i$, d. h. grösser als $c_4$ sind. Unter Einführung des Zeichens

$$\varepsilon' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$$

ergiebt sich jetzt

$$W = P \qquad\qquad \Omega = -\varepsilon' P$$

man kann daher setzen

$$e\sqrt{P} = \sqrt{W} \qquad\qquad -\varepsilon\sqrt{-P} = \sqrt{\varepsilon'\Omega}$$

und erhält demzufolge für $v_i$, $R$ die Ausdrücke:

$$v_i = \frac{\sqrt{P}}{w_i} = \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{z} - e_i\sqrt{z-c_i}} \qquad\qquad v_i = \frac{\sqrt{-P}}{\omega_i} = \varepsilon_i\frac{\sqrt{\varepsilon'\Omega}}{\sqrt{\zeta+c_i} - \varepsilon_i\sqrt{\zeta}}$$

$$R = PQ = w\sqrt{P} = 2\sqrt{z}\sqrt{W} \qquad\qquad R = 2\sqrt{\zeta}\sqrt{\varepsilon'\Omega}$$

VI. Die irrationale Gleichung (6) in $z$ oder $\zeta = -z$ wird rational gemacht, indem man die Norm ihrer linken Seite, d. h. das Product der 16 irrationalen Factoren, welche den verschiedenen Werthen der Vorzeichen $e_1\ldots.e_4$ oder $\varepsilon_1\ldots.\varepsilon_4$ entsprechen, bildet, und dieses Product, welches ich mit $\Phi(z) = \Phi(-\zeta)$ bezeichne, $= 0$ setzt. Jeder der 16 irrationalen Factoren giebt, nach fallenden Potenzen von $z$ oder $\zeta$ geordnet, eine Entwicklung der Form

$$Az^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}Bz^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}Cz^{-\frac{3}{2}}\ldots\ldots \qquad\qquad A'\zeta^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}B'\zeta^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}C'\zeta^{-\frac{3}{2}}\ldots\ldots$$

wo

$$A = 2 - \Sigma e_i,\ B = \Sigma e_i c_i,\ C = \Sigma e_i c_i^2 \quad A' = 2 - \Sigma \varepsilon_i,\ B' = \Sigma \varepsilon_i c_i,\ C' = \Sigma \varepsilon_i c_i^2$$

In zwölf Factoren ist der Coefficient $A$ (oder $A'$) von der Null verschieden, in denjenigen vier dagegen, in welchen von den vier Vorzeichen $e_i$ oder $\varepsilon_i$ eines negativ, die drei anderen positiv sind, ist der Coefficient $A$ (oder $A'$) des ersten Gliedes der Entwicklung $= 0$. Die Norm $\Phi$ ist daher in $z$ oder $\zeta$ nicht von höherem als dem vierten Grade. Unter den vierten Grad kann $\Phi$ nur sinken, wenn in einem der bezeichneten vier Factoren ausser dem Coefficienten des ersten Gliedes der Entwicklung auch der Coefficient des zweiten Gliedes verschwindet. Dies ist nur in einem der 4 Factoren möglich, nämlich in demjenigen, für welchen $e_1 = e_2 = e_3 = +1$, $e_4 = -1$, und in diesem auch nur dann, wenn zwischen den Constanten $c_i$ die Relation

$$c_1 + c_2 + c_3 = c_4$$

besteht. In diesem Fall ist $\Phi(z)$ nur vom dritten Grade.

Die Wurzeln der Gleichung $\Phi(z) = 0$ sind sämmtlich reell und drei derselben immer negativ, entsprechen also positiven Werthen von $\zeta$. Sie gehören den 6 irrationalen Factoren in $\zeta$ an, für welche von den vier Zeichen $\varepsilon_i$ zwei positiv, zwei negativ sind. Betrachtet man z. B. die beiden Factoren

$$2\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta + c_1} + \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} - \sqrt{\zeta + c_4}$$

$$2\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} + \sqrt{\zeta + c_3} + \sqrt{\zeta + c_4}$$

so ändern sich dieselben von $\zeta = 0$ bis $\zeta = +\infty$ continuirlich. Für $\zeta = 0$ haben sie entgegengesetzte Werthe, wenn dagegen $\zeta$ in positivem Sinne über alle Grenzen wächst, werden beide Factoren positiv, einer derselben hat daher eine positive Wurzel $\zeta = \zeta_1$. Auf ähnliche Weise lässt sich die Existenz zweier anderen Wurzeln $\zeta = \zeta_2$, $\zeta = \zeta_3$ nachweisen. Aber diesen drei Wurzeln entsprechen imaginäre Lösungen des Maximum-Problems. Denn für jede derselben ist

$$\varepsilon' = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = -1$$

also $\sqrt{\varepsilon' \Omega}$ imaginär, wodurch sämmtliche Grössen $v_i$ und $R$ imaginär werden.

Die jetzt noch übrige vierte Wurzel von $\Phi(z) = 0$ giebt immer eine reelle Lösung des Maximum-Problems. Zu ihrer Be-

stimmung müssen die beiden Fälle unterschieden werden, in welchen

$$c_4 > c_1 + c_2 + c_3 \quad \text{oder} \quad c_4 < c_1 + c_2 + c_3$$

Für den beide Fälle von einander trennenden Grenzfall $c_4 = c_1 + c_2 + c_3$ wissen wir bereits, dass die vierte Wurzel von $\Phi(z) = 0$ unendlich gross ist. In diesem Falle geben die Formeln des vorigen Art.

$$v_1 = \sqrt{\frac{c_2 c_3}{c_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{c_1 c_3}{c_2}}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_3}}, \quad v_4 = 0$$

also

$$(12) = (14) + (24), \quad (13) = (14) + (34), \quad (23) = (24) + (34)$$

d. h. die Ecke im Puncte (4) ist drei-rechtwinklig.

Es sei

$$c_4 > c_1 + c_2 + c_3$$

alsdann genügt der irrationalen Gleichung

$$2\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} + \sqrt{\zeta + c_4} = 0$$

eine positive Wurzel $\zeta = \zeta_0$, da die linke Seite für $\zeta = 0$ den negativen Werth $-\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2} - \sqrt{c_3} + \sqrt{c_4}$ annimmt, während ihre Entwicklung

$$-\tfrac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3 - c_4)\zeta^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - c_4^2)\zeta^{-\frac{3}{2}} \ldots\ldots$$

zeigt, dass sie für hinreichend grosse Werthe von $\zeta$ positiv wird. In diesem Fall ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$, $\varepsilon_4 = -1$, $\varepsilon' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = +1$, $\varepsilon'\Omega = \Omega$ positiv also $\sqrt{\varepsilon'\Omega}$ reell. Nimmt man den positiven Werth dieser Quadratwurzel, so werden nach den Formeln des vorigen Art. $v_1$, $v_2$, $v_3$ positiv, $v_4$ negativ, $R$ positiv. Da in

$$-f = v_1 y_1^2 + v_2 y_2^2 + v_3 y_3^2 + v_4 y_4^2 \qquad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0)$$

drei der Multiplicatoren $v_i$ positiv, einer negativ ist, so genügt es, dass die Determinante $R$ von $-f$ positiv sei, damit $-f$ eine definite positive Form sei. Somit ist die Nebenbedingung erfüllt und die Lösung eine reelle.

Es sei zweitens

$$c_4 < c_1 + c_2 + c_3$$

man setze

$$\psi(z) = 2\sqrt{z} - \sqrt{z - c_1} - \sqrt{z - c_2} - \sqrt{z - c_3} - \eta\sqrt{z - c_4}$$

wo $\eta = +1$ oder $= -1$, je nachdem

$$\psi(c_4) = 2\sqrt{c_4} - \sqrt{c_4 - c_1} - \sqrt{c_4 - c_2} - \sqrt{c_4 - c_3}$$

positiv oder negativ ist, dann hat $\psi(z) = 0$ eine Wurzel $z = z_0$ zwischen $z = c_4$ und $z = +\infty$. In der That die Entwicklung nach fallenden Potenzen von $z$ giebt

für $\eta = +1$ $\quad \psi(z) = -2z^{\frac{1}{2}} + (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)z^{-\frac{1}{2}} \ldots$

für $\eta = -1$ $\quad \psi(z) = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3 - c_4)z^{-\frac{1}{2}} + \ldots$

also machen hinreichend grosse Werthe von $z$ den Ausdruck $\psi(z)$ negativ für $\eta = +1$, positiv für $\eta = -1$, d. h. von entgegengesetztem Zeichen mit $\eta$, während er für $z = c_4$ von gleichem Zeichen mit $\eta$ ist, womit die Existenz der Wurzel $z = z_0$ bewiesen ist.

In diesem Falle werden nach den Formeln des Art. V und für den positiven Werth der Quadratwurzel $\sqrt{W}$ sämmtliche Grössen $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $R$ positiv, und es bedarf daher keines Beweises, dass

$$f = -\sum_i v_i y_i^2$$

eine definite negative Form ist.

---

Zu corrigiren bitte ich

p. 16 Z. 12 v. u. $a_{f\alpha}\, a_{f\beta}$

p. 20 Z. 6 v. u. $(acd)\,\alpha_1 + (bcd)\,\beta_1 = (ab'cd)\,(c_2 d - c d_2)$

p. 66 Z. 5 v. u. $r = 2, \ldots$

p. 99 Z. 10 v. u. $\alpha^n = 1$.

---

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.